Chapitre continuité

Attention !

Avant de commencer, je vous conseille fortement de faire sérieusement les exemples et exercices proposés qui sont formateurs et vous préparent pour le bac (certains dépassent les exigences du bac) ! Si vous savez faire les exos, vous êtes plus que prêt pour le bac ! Regarder la solution APRÈS avoir cherché !

1 Propriétés

Définition 1 (Approche 1)**.** *Soit f une fonction quelconque. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère. On dit que f est **continue** si l'on peut tracer (C_f) sans lever le crayon.*

Remarque 1. *Cette définition est évidemment très limitée et n'est pas du tout rigoureuse mathématiquement. La définition formelle de la continuité est **hors-programme**.*

Définition 2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I tel que $a \in I$. f est **continue** en $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$*

Exemple :
Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x^2 + e^x$ est continue en 2.

Solution : On a :

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 + e^2 \\ &= 4 + e^2 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} f(x) &= \lim_{x \to 2} (x^2 + e^x) \\ &= 2^2 + e^2 \\ &= 4 + e^2 \\ &= f(2) \end{aligned}$$

Conclusion : f est **continue** en 2.

Propriété 1. — *Les **fonctions puissances** sont **continues** sur* $\mathbb{R}$.
- — *La **fonction exponentielle** est continue sur* $\mathbb{R}$.
- — *La **fonction inverse** est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- — *La **fonction valeur absolue** est continue sur* $\mathbb{R}$.
- — *Les **fonctions circulaires** (fonctions cosinus et sinus) sont continues sur* $\mathbb{R}$.
- — *La fonction **racine carrée** est continue sur* $\mathbb{R}^+$

Propriété 2. *D'une façon générale :*
- — *La **somme** de **deux fonctions continues** sur $\mathbb{R}$ est **continue** sur $\mathbb{R}$.*
- — *Le **produit** de **deux fonctions continues** sur $\mathbb{R}$ est **continue** sur $\mathbb{R}$.*
- — *La **composée** de **deux fonctions continues** sur $\mathbb{R}$ est **continue** sur $\mathbb{R}$.*
- — *Le **quotient** de **deux fonctions continues** sur $\mathbb{R}$ est **continue** sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$*

Remarque 2. *Les **fonctions polynômiales** sont **continues** sur* $\mathbb{R}$.

Exemple :

Soit f la fonction définie par : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x-1}$ et $f(1) = -4$

Montrer que f est continue en 1.

Solution : Montrer que f est continue en 1 consiste à démontrer que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = -4$.

On remarque que $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-6x+5) = 0$.

Nous avons donc une **forme indéterminée**. Pour lever **l'indétermination**, procédons à un calcul de **taux d'accroissement** :

En posant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = x^2 - 6x + 5$, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} f(x) &= \lim_{x \to 1} \frac{g(x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} \quad (\text{car } g(1) = 0)\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x \to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} g'(x)$ (car g est dérivable).

g est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ car polynômiale. On a donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = 2x - 6$.

Donc,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} g'(x) &= \lim_{x \to 1} (2x - 6) \\ &= 2 \cdot 1 - 6 \\ &= -4 \\ &= f(1)\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -4 = f(1)$.

Conclusion : La fonction f est donc continue en 1, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$

Remarque 3. *La méthode du taux d'accroissement ne tombe pratiquement jamais au bac, mais il est toujours bon de le savoir !*

Propriété 3.
- *Une fonction f est **dérivable** en un point $a \Rightarrow f$ est **continue** en a.*
- *Une fonction f est **dérivable** sur un intervalle $I \Rightarrow f$ est **continue** sur I. $(*)$*

Remarque 4. ***La réciproque est fausse**. En effet, concernant la fonction racine carrée, vous avez dû voir que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. Or, la fonction racine carrée est continue en 0 puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$. Pour justifier la continuité d'une fonction sur un intervalle, on utilisera très souvent la propriété $(*)$ (et ça tombe plus souvent au bac !)*

2 Théorèmes

Théorème 1 (du point fixe)**.** *Soit une suite* (u_n) *définie par un premier terme* u_0 *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ *telle que* (u_n) ***converge*** *vers* ℓ*. La fonction* f *est* ***continue*** *en* $\ell \Rightarrow f(\ell) = \ell$*.*

Théorème 2 (des valeurs intermédiaires)**.** *Soit* f *une fonction* ***continue*** *sur un intervalle* $[a;b]$*.* $\forall k \in [f(a); f(b)]$*,* $\exists \alpha \in [a;b]$ *tel que :* $f(\alpha) = k$

Corollaire 1. *Soit* f *une fonction* ***continue*** *et* ***strictement monotone*** *sur un intervalle* $[a;b]$*.* $\forall k \in [f(a); f(b)]$*,* $\exists! \alpha \in [a;b]$ *tel que :* $f(\alpha) = k$*.*

Remarque 5. *Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, aussi appelé* ***théorème de la bijection*** *est* ***crucial*** *dans ce chapitre !* ***À retenir absolument.***

3 Exercices

Voici des exercices types en lien avec la continuité ! Ces exercices, comparés aux exercices sur les limites de suites, sont plus accessibles et se rapprochent donc plus de ce que vous aurez au bac.

Exercice 1 : (5 points)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$. On pose la fonction f définie sur $[0;1]$ par : pour tout $x \in [0;1]$: $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 8}$.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur $[0;1]$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 1$
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n) par récurrence.
4. En déduire que (u_n) converge.
5. Soit ℓ sa limite. Déterminer alors ℓ.

Exercice 2 : (4 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1)$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 4(e^{-x} - 1)(1 - x)$

2. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $]\frac{3}{2}; 2[$ tel que : $f(\alpha) = 0$
4. Vérifier que $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$

Exercice 3 : BONUS (1 point)

Une fonction continue sur un intervalle I n'est pas nécessairement dérivable sur I ! Donner au moins un exemple.

IV) Correction

Exercice 1 :

1)

On a pour tout $x \in [0; 1]$: $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 8}$.

f est **dérivable** sur $[0; 1]$ en tant que **composée** de deux fonctions dérivables sur $[0; 1]$.

On pose : $u(x) = x^2 + 8 \Rightarrow u'(x) = 2x$

Formule : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Pour tout $x \in [0; 1]$:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2+8}}$$

Pour tout $x \in [0; 1]$: $x \geq 0$ et $3\sqrt{x^2 + 8} \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$

Puisque $f'(x) \geq 0$, alors f est **croissante**.

2)

Procédons à un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Soit $P(n)$ la propriété : $0 \leq u_n \leq 1$.

Initialisation : pour $n = 0$: $u_0 = \frac{1}{2}$ et $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$, d'où $P(0)$ est **vraie**.

Hérédité : À $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons $P(n)$ vraie ; démontrons alors $P(n+1)$:

Par **hypothèse de récurrence**, on a :

$0 \leq u_n \leq 1$, donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$ (en composant par f puisque f est **croissante** sur $[0;1]$)

Or : $f(0) = \frac{1}{3}\sqrt{8} = \frac{\sqrt{8}}{3} \leq 1$ et $f(1) = \frac{1}{3}\sqrt{9} = 1$

Ainsi, $\frac{\sqrt{8}}{3} \leq u_{n+1} \leq 1$ (car $f(u_n) = u_{n+1}$), donc $0 \leq \frac{\sqrt{8}}{3} \leq u_{n+1} \leq 1$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ D'où **l'hérédité**.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 1$.

3)

On a : $u_0 = \frac{1}{2}$. Calculons u_1 :

$$\begin{aligned}
&u_1 = f(u_0)\\
&\quad \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 8}\\
&\quad \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + 8}\\
&\quad \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{33}{4}}\\
&\quad \Leftrightarrow u_1 = \frac{\sqrt{33}}{6} \geq u_0
\end{aligned}$$

On a donc $u_1 > u_0$, donc $u_1 - u_0 > 0$. **Conjecturons** alors que la suite (u_n) est **croissante** ! Démontrons notre **conjecture par récurrence** sur $n \in \mathbb{N}$. Soit $P(n)$ la propriété : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Initialisation : déjà montrée, donc vraie.

Hérédité : À $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons $P(n)$ vraie ; démontrons alors $P(n+1)$:

Par **hypothèse de récurrence**, on a :

$u_{n+1} - u_n \geq 0$, donc $u_{n+1} \geq u_n$, donc $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ (car f est **croissante** sur $[0;1]$)

Donc $u_{n+2} \geq u_{n+1}$, donc $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 0$, d'où **l'hérédité**.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est **croissante**.

4)

La suite (u_n) est **croissante** et **majorée** (par 1), donc elle **converge**.

5)

Notons ℓ sa limite. Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$, et que f est **continue** en ℓ, alors ℓ est **solution** de l'équation $f(x) = x$.

On résout $f(x) = x$ sur $[0;1]$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{1}{3}\sqrt{x^2+8} = x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+8} = 3x \\ &\Leftrightarrow x^2+8 = 9x^2 \\ &\Leftrightarrow 9x^2 - x^2 - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow 8x^2 - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow 8(x^2-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{aligned}$$

Or, $-1 \notin [0;1]$, donc seule 1 est **solution** de l'équation $f(x) = x$.

Pour conclure, par **théorème du point fixe**, (u_n) **converge** vers 1.

Exercice 2 :

On a $f(x) = 4x(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1)$

1)

f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ en tant que **produit** de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

On pose : $u(x) = 4x \Rightarrow u'(x) = 4$ et $v(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow v'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}$

Formule : $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cdot (e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1) + 4x \cdot (-e^{-x} + \frac{1}{2}) \\ \Leftrightarrow f'(x) &= 4 \cdot (e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1 - xe^{-x} + \frac{1}{2}x) \\ \Leftrightarrow f'(x) &= 4 \cdot (e^{-x} - xe^{-x} + x - 1) \\ \Leftrightarrow f'(x) &= 4e^{-x}(1-x) + 4(x-1) \\ \Leftrightarrow f'(x) &= 4e^{-x}(1-x) - 4(1-x) \\ \Leftrightarrow f'(x) &= 4(1-x)(e^{-x} - 1) \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 4(1-x)(e^{-x} - 1)$

2)

Études le signe de $f'(x)$:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} - 1 = 0$ ou $1 - x = 0$
  $\Leftrightarrow e^{-x} = 1$ ou $x = 1$
  $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$
- **On sait que** $(1-x) > 0$ pour $x \in]-\infty; 1[$
  et $(1-x) < 0$ pour $x \in]1; +\infty[$
- **On sait que** $e^{-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1$
  $\Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0.$
  De même, $e^{-x} - 1 < 0 \Leftrightarrow x > 0$

Ainsi, on en déduit le signe de $f'(x)$:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0; 1[$

3)

On sait que :

- La fonction f est **continue** sur $]\frac{3}{2}; 2[$ (car **dérivable** sur $]\frac{3}{2}; 2[$)
- f est **strictement croissante** sur $]1; +\infty[$, donc elle l'est aussi sur $]\frac{3}{2}; 2[$

• Enfin $\lim_{x\to(\frac{3}{2})^+} f(x) = f(\frac{3}{2}) \approx -0,16 < 0$ (car f est **continue** en $\frac{3}{2}$)

et $\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \approx 1,08 > 0$

> Ainsi, d'après le **théorème de la bijection**, il **existe un unique** $\alpha \in]\frac{3}{2}; 2[$ tel que : $f(\alpha) = 0$

4)

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow 4\alpha(e^{-\alpha} + \frac{1}{2}\alpha - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{-\alpha} + \frac{1}{2}\alpha - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{-\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\alpha \\ &\Leftrightarrow e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

> En somme, nous pouvons **conclure** que : $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$

Exercice 3 :

Exemples :
• La fonction **racine carrée** est **continue** en 0, mais **n'est pas dérivable** en 0
• La fonction **valeur absolue** est **continue** en 0, mais **n'est pas dérivable** en 0
• (Hors-programme mais à titre culturel : il existe une fonction qui s'appelle **"fonction de Weierstrass"** qui est **continue** sur $\mathbb{R}$ mais **n'est dérivable nulle part**)

> **Alors, tu as eu combien ? Si tu es toujours aussi chaud, je te conseille d'aller voir les autres cours disponibles dans la rubrique *"Mathématiques"* afin de cartonner pour le bac !**