Fonctions circulaires

I) Dérivabilité

Propriété :
Les fonctions **cosinus et sinus** sont **dérivables** sur $\mathbb{R}$ et on a :
Pour tout x de $\mathbb{R}$: $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$.

Définition :
Une fonction f est dite T-**périodique** lorsque : $f(x+T) = f(x)$.

Remarque :
Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-**périodiques**. En effet : $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

Propriété :
Soit u une **fonction dérivable** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et on note u' sa dérivée. On a :
Pour tout x de I : $(\cos(u))' = -u'\sin(u)$ et $(\sin(u))' = u'\cos(u)$.

Exemple : *Dérivez les fonctions suivantes :*

(1). $f(x) = \cos(x^2)$

(2). $g(x) = \cos(2x)\sin(2x)$

Solution :

(1). On pose : $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$

Formule : $(\cos(u))' = -u'\sin(u)$

Conclusion :
On a pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = -2x\sin(x^2)$

(2).

On pose : $u(x) = \cos(2x) \Rightarrow u'(x) = -2\sin(2x)$ et

$$v(x) = \sin(2x) \Rightarrow v'(x) = 2\cos(2x)$$

Formule : $(uv)' = u'v + uv'$

Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2\sin(2x)\sin(2x) + 2\cos(2x)\cos(2x) \\ &\Leftrightarrow g'(x) = 2(\cos(2x))^2 - 2(\sin(2x))^2 \\ &\Leftrightarrow g'(x) = 2(\cos(2x) - \sin(2x))(\cos(2x) + \sin(2x)) \end{aligned}$$

Conclusion :
D'où : $g'(x) = 2(\cos(2x) - \sin(2x))(\cos(2x) + \sin(2x))$

II) Cercle trigonométrique

On se place dans le **plan muni d'un repère** $(O, \vec{i}; \vec{j})$

Définition :
Le **cercle trigonométrique** est le cercle C de centre O et de rayon 1 ; $C = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$

Définition :
Soit $M(x; y)$ un point du **cercle trigonométrique**. On appelle $\cos(t)$ **l'abscisse** du point M et $\sin(t)$ **l'ordonnée** du point M. Ainsi :

$$M(\cos(t); \sin(t))$$

Propriété :
Si t dans $\mathbb{R}$, alors :

- $(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 1$
- $\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$ et $\sin(t + 2\pi) = \sin(t)$
- $\cos(t) = \cos(-t)$ et $\sin(-t) = -\sin(t)$
- $\cos(t + \pi/2) = -\sin(t)$ et $\cos(t - \pi/2) = \sin(t)$
- $\sin(t + \pi/2) = \cos(t)$ et $\sin(t - \pi/2) = -\cos(t)$
- $\cos(\pi + t) = -\cos(t)$ et $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$
- $\sin(\pi + t) = -\sin(t)$ et $\sin(\pi - t) = \sin(t)$

III) Exercices

Exercice 1 (5 points) : Résoudre les équations et inéquations suivantes sur l'intervalle I considéré :

(1). $\sin(2x + \pi/4) = \sqrt{3}/2$, $I =]-\pi; \pi]$.

(2). $\cos(3x) = 1/2$, $I = \mathbb{R}$

(3). $\sin(2x) = 1$, $I =]-\pi; \pi]$

(4). $\cos(4x - \pi/3) < 1/2$, $I = [0; 2\pi[$

(5). $\sin(2x + \pi/6) > \sqrt{2}/2$ sur $[0; \pi[$

Exercice 2 (4 points) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2(\cos(x))^2 + \cos(x) - 1.$$

1) Factoriser $f(x)$ en un produit de deux termes.

2) Résoudre l'équation $f(x) = 0$

3) Etudier le signe de $f(x)$

4) Résoudre l'inéquation : $f(x) \geq 0$ sur $[0; 2\pi]$.

Exercice 3 (11 points) :

Soit f la fonction définie sur $]-3\pi/2; \pi/2[$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(2x)+\cos(2x)}{1-\sin(x)}$$

1) Calculer $f'(x)$ pour x dans $]-3\pi/2; \pi/2[$.

2) Etablir les variations de f sur $]-3\pi/2; \pi/2[$.

3) Déterminer le minimum de f sur $]-3\pi/2; \pi/2[$.

4) Résoudre l'équation $f(x) = 0$

5) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$

Soit g la fonction définie sur $]-\pi/2; \pi/2[$ par :

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

6) Démontrer que g est π-périodique et impaire.

7) Démontrer que : $g'(x) = 1 + (g(x))^2$

N.B : La fonction g est la fonction tan mais n'est pas au programme du lycée !

IV) Corrections

(1).

$$\begin{aligned}
\sin(2x + \pi/4) = \sqrt{3}/2 \\
&\Leftrightarrow \sin(2x + \pi/4) = \sin(\pi/3) \\
&\Leftrightarrow 2x + \pi/4 = \pi/3 \text{ ou } 2x + \pi/4 = \pi - \pi/3 \text{ (car } \sin(\pi - t) = \sin(t)) \\
&\Leftrightarrow 2x + \pi/4 = \pi/3 \text{ ou } 2x + \pi/4 = 2\pi/3 \\
&\Leftrightarrow 2x = \pi/12 \text{ ou } 2x = 5\pi/12 \\
&\Leftrightarrow x = \pi/24 \text{ ou } x = 5\pi/24
\end{aligned}$$

Conclusion :
$S_1 = \{\pi/24; 5\pi/24\}$

(2).

$$\begin{aligned}
\cos(3x) = 1/2 \\
&\Leftrightarrow \cos(3x) = \cos(\pi/3) \\
&\Leftrightarrow 3x = \pi/3 + 2k\pi \text{ ou } 3x = -\pi/3 + 2k\pi \text{ (avec } k \text{ dans } \mathbb{Z}) \text{ (car } \cos(x) = \cos(-x)) \\
&\Leftrightarrow x = \pi/9 + 2k\pi/3 \text{ ou } x = -\pi/9 + 2k\pi/3 \text{ (avec } k \text{ dans } \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Conclusion :
$S_2 = \{-\pi/9 + 2k\pi/3, k \in \mathbb{Z}; \pi/9 + 2k\pi/3, k \in \mathbb{Z}\}$

(3).

$$\begin{aligned}
\sin(2x) = 1 \\
&\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(\pi/2) \\
&\Leftrightarrow 2x = \pi/2 \\
&\Leftrightarrow x = \pi/4
\end{aligned}$$

Conclusion :
$S_3 = \{\pi/4\}$

(4).

$$\begin{aligned} x \in [0;2\pi[&\Leftrightarrow 0 \leq x < 2\pi \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 4x < 8\pi \\ &\Leftrightarrow -\pi/3 \leq 4x - \pi/3 < 23\pi/3 \end{aligned}$$

On pose ainsi $X = 4x - \pi/3$. Alors $X \in [-\pi/3; 23\pi/3[$

$$\begin{aligned} \cos(X) < 1/2 \Leftrightarrow &(\cos(X) < \cos(\pi/3) \text{ et } \cos(X) < \cos(5\pi/3)) \\ &\text{ou } (\cos(X) < \cos(7\pi/3) \text{ et } \cos(X) < \cos(11\pi/3)) \\ &\text{ou } (\cos(X) < \cos(13\pi/3) \text{ et } \cos(X) < \cos(17\pi/3)) \\ &\text{ou } (\cos(X) < \cos(19\pi/3) \text{ et } \cos(X) < \cos(23\pi/3)) \end{aligned}$$

Pour déterminer tous ces angles particuliers, il faut voir sur le cercle trigonométrique !

$$\begin{aligned} \cos(X) < 1/2 \Leftrightarrow &(X > \pi/3 \text{ et } X < 5\pi/3) \\ &\text{ou } (X > 7\pi/3 \text{ et } X < 11\pi/3) \\ &\text{ou } (X > 13\pi/3 \text{ et } X < 17\pi/3) \\ &\text{ou } (X > 19\pi/3 \text{ et } X < 23\pi/3) \end{aligned}$$

Ces inégalités sont déduites à partir des variations du cosinus !

$$\begin{aligned} \cos(X) < 1/2 \Leftrightarrow &(4x - \pi/3 > \pi/3 \text{ et } 4x - \pi/3 < 5\pi/3) && (1) \\ &\text{ou } (4x - \pi/3 > 7\pi/3 \text{ et } 4x - \pi/3 < 11\pi/3) && (2) \\ &\text{ou } (4x - \pi/3 > 13\pi/3 \text{ et } 4x - \pi/3 < 17\pi/3) && (3) \\ &\text{ou } (4x - \pi/3 > 19\pi/3 \text{ et } 4x - \pi/3 < 23\pi/3) && (4) \\ &\Leftrightarrow (4x > 2\pi/3 \text{ et } 4x < 2\pi) && (5) \\ &\text{ou } (4x > 8\pi/3 \text{ et } 4x < 4\pi) && (6) \\ &\text{ou } (4x > 14\pi/3 \text{ et } 4x < 6\pi) && (7) \\ &\text{ou } (4x > 20\pi/3 \text{ et } 4x < 8\pi) && (8) \\ &\Leftrightarrow (x > \pi/6 \text{ et } x < \pi/2) && (9) \\ &\text{ou } (x > 2\pi/3 \text{ et } x < \pi) && (10) \\ &\text{ou } (x > 7\pi/6 \text{ et } x < 3\pi/2) && (11) \\ &\text{ou } (x > 5\pi/3 \text{ et } x < 2\pi) && (12) \\ & && (13) \end{aligned}$$

Conclusion :
Après un calcul laborieux :

$$S_4 =]\pi/6;\pi/2[\cup]2\pi/3;\pi[\cup]7\pi/6;3\pi/2[\cup]5\pi/3;2\pi[$$

(5).

$$\begin{aligned} x \in [0;\pi[&\Leftrightarrow 0 \leq x < \pi \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 2x < 2\pi \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 2x + \pi/6 < 11\pi/6 \end{aligned}$$

On pose désormais : $X = 2x + \pi/6$

$$\begin{aligned} \sin(X) > \sqrt{2}/2 &\Leftrightarrow (\sin(X) > \sin(\pi/4) \text{ et } \sin(X) > \sin(3\pi/4)) \\ &\Leftrightarrow X > \pi/4 \text{ et } X < 3\pi/4 \\ &\Leftrightarrow 2x + \pi/6 > \pi/4 \text{ et } 2x + \pi/6 < 3\pi/4 \\ &\Leftrightarrow x > \pi/24 \text{ et } x < 7\pi/24 \\ &\Leftrightarrow x \in]\pi/24; 7\pi/24[\end{aligned}$$

Attention à la deuxième ligne ! La fonction sin est strictement décroissante sur $[\pi/2; 3\pi/2]$)

Conclusion :
$S_5 =]\pi/24; 7\pi/24[$

Exercice 2 :

On a : $f(x) = 2(\cos(x))^2 + \cos(x) - 1$.

1) On pose : $X = \cos(x) \Rightarrow$ on a donc $f(X) = 2X^2 + X - 1$

On remarque que nous avons un **trinôme du second degré**.

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 > 0$$

$\Delta > 0$, donc deux racines distinctes :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-1+\sqrt{9}}{2\cdot 2} \text{ et } X_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\cdot 2} \\ &= \frac{1}{2} \qquad\qquad\qquad = -1 \end{aligned}$$

Ainsi : $2X^2 + X - 1 = 2(X+1)(X-1/2)$

Conclusion :
Comme $X = \cos(x)$, on en déduit : $f(x) = 2(\cos(x) + 1)(\cos(x) - 1/2)$

2) On a :

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ & \quad \Leftrightarrow 2(\cos(x) + 1)(\cos(x) - 1/2) = 0 \\ & \quad \Leftrightarrow \cos(x) + 1 = 0 \text{ ou } \cos(x) - 1/2 = 0 \\ & \quad \Leftrightarrow \cos(x) = -1 \text{ ou } \cos(x) = 1/2 \\ & \quad \Leftrightarrow \cos(x) = \cos(\pi) \text{ ou } \cos(x) = \cos(\pi/3) \\ & \quad \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \text{ ou } x = \pi/3 + 2k\pi \text{ ou } x = -\pi/3 + 2k\pi \end{aligned}$$

Conclusion :
$S = \{-\pi/3 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; \pi/3 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

3) On a $f(X) = 2X^2 + X - 1$
$f(X)$ est du signe de $a = 2 > 0$ à **l'extérieur des racines**. Ainsi :

$$\begin{aligned} & f(X) > 0 \\ & \quad \Leftrightarrow X \in]-\infty; -1[\cup]1/2; +\infty[\\ & \quad \Leftrightarrow X \in]-\infty; -1[\cup]1/2; 1] \cup [1; +\infty[\end{aligned}$$

Or en réalité, $-1 \leq X \leq 1$ puisque $X = \cos(x)$)

On en déduit :

$$f(X) < 0 \Leftrightarrow X \in]-1; 1/2[$$

Conclusion :
On a donc :

$$\begin{aligned} f(x) < 0 & \Leftrightarrow -1 < \cos(x) < 1/2 \\ & \Leftrightarrow x \in]\pi/3 + 2k\pi; \pi + 2k\pi[\cup]\pi + 2k\pi; 5\pi/3 + 2k\pi[\\ & \Leftrightarrow x \in]\pi/3 + 2k\pi; \pi(2k+1)[\cup]\pi(2k+1); 5\pi/3 + 2k\pi[\\ f(x) > 0 & \Leftrightarrow 1/2 < \cos(x) \leq 1 \\ & \Leftrightarrow x \in]-\pi/3 + 2k\pi; \pi/3 + 2k\pi[\end{aligned}$$

4) Sur $[0; 2\pi[$:

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$ ou $f(x) = 0$

Sur $[0; 2\pi[$:
$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [0; \pi/3[\cup]5\pi/3; 2\pi[$ et $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\pi/3; \pi; 5\pi/3\}$

Conclusion :
Ainsi, on en déduit : $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0;\pi/3] \cup \{\pi\} \cup [5\pi/3;2\pi[$

Alors, tu as eu combien ? Si tu es toujours aussi chaud, je te conseille d'aller voir les autres cours disponibles dans la rubrique *"Mathématiques"* afin de cartonner pour le bac !