Dérivation et convexité

Attention ! Avant de commencer, je vous conseille fortement de faire sérieusement les exemples et exercices proposés qui sont formateurs et vous préparent pour le bac (certains dépassent les exigences du bac) ! Si vous savez faire les exos, vous êtes plus que prêt pour le bac ! Regarder la solution APRÈS avoir cherché !

1 Rappel

Petit rappel sur les formules de dérivation vues en première spécialité à connaître !

Fonction	**Fonction dérivée**
$k\ (k \in \mathbb{R})$	0
x	1
x^2	$2x$
$x^n\ (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

TABLE 1 – Dérivées de fonctions courantes

Si u et v sont deux fonctions dérivables, alors en notant u' et v' leurs dérivées respectives :

$$\begin{aligned}
(u+v)' &= u' + v' \\
(ku)' \text{ avec } k \text{ réel } &= ku' \\
(u \times v)' &= u' \times v + u \times v' \\
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2} \\
\left(\frac{1}{u}\right)' &= -\frac{u'}{u^2}
\end{aligned}$$

2 La composition

Définition 1 :
Soit u et v deux fonctions telles que u est définie sur un intervalle I et v sur un intervalle J avec $I \subset J$. On note alors $v \circ u$ la fonction définie sur I par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$

Exemple : On pose $u(x) = x + 1$ et $v(x) = e^x$
Alors : $(v \circ u)(x) = e^{x+1}$ et $(u \circ v)(x) = e^x + 1$

Propriétés :

— La composition est une opération **associative**, c'est-à-dire que pour f, g et h trois fonctions : $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

— En revanche, la composition n'est pas une loi **commutative**, c'est-à-dire que pour u, v deux fonctions : $u \circ v \neq v \circ u$

Exemple : En reprenant l'exemple précédent, on remarque bien que $(v \circ u)(x) \neq (u \circ v)(x)$

3 Dérivées de fonctions composées

Soit u et v deux fonctions dérivables. En notant u' et v' les dérivées respectives de u et v, on a :

$$(u \circ v)' = v' \times (u' \circ v)$$

Conséquence :

- u et v sont de **même monotonie** (croissante ou décroissante) $\Rightarrow$ $u \circ v$ **croissante**.
- u et v ne sont pas de même **monotonie** $\Rightarrow u \circ v$ **décroissante**.

Tableau de dérivées complet à connaître :
Si u et v sont deux fonctions **dérivables**, alors en notant u' et v' leurs dérivées respectives :

$$\begin{aligned}
(u^n)' &= nu'u^{n-1} \\
\left(\frac{1}{u^n}\right)' &= -\frac{nu'}{u^{n+1}} \\
(\sqrt{u})' &= \frac{u'}{2\sqrt{u}} \\
(e^u)' &= u' \times e^u \\
(\ln(u))' &= \frac{u'}{u} \text{ (voir chapitre logarithme népérien)} \\
(\sin(u))' &= u' \times \cos(u) \\
(\cos(u))' &= -u' \times \sin(u)
\end{aligned}$$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \cos(\sqrt{x})$.

Déterminer $f'(x)$.

$$\begin{aligned}
\textbf{Solution} : \text{on pose } v(x) = \sqrt{x} \Rightarrow v'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
\text{et } u(x) = \cos(x) \Rightarrow u'(x) &= -\sin(x)
\end{aligned}$$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ (attention racine carrée n'est **PAS** dérivable en 0 !) en tant que composée de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

Formule : $(u \circ v)' = v' \times (u' \circ v)$

Donc, pour tout x de $]0;+\infty[$: $f'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

4 Convexité

Définition :
Soit f une fonction et on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Si A et B sont deux points de (C_f), alors la droite (AB) est une sécante de (C_f). La notation f'' désigne la **dérivée seconde** de f, mais aussi la dérivée de la dérivée ($f'' = (f')'$) Si A a pour abscisse a, alors on définit le nombre dérivé en a noté $f'(a)$ comme étant le coefficient directeur de la tangente à (C_f) en a.

— f est convexe sur un intervalle I $\Leftrightarrow$ pour tout x de I, (C_f) est **au-dessus** de ses tangentes.
$\Leftrightarrow$ pour tout x de I, (C_f) est **en dessous** de ses sécantes.
$\Leftrightarrow$ pour tout x de I, $f''(x) \geq 0$
$\Leftrightarrow$ pour tout x de I, f' est **croissante**.

— f est concave sur un intervalle I $\Leftrightarrow$ pour tout x de I, (C_f) est **en dessous** de ses tangentes.
$\Leftrightarrow$ pour tout x de I, (C_f) est **au-dessus** de ses sécantes.
$\Leftrightarrow$ pour tout x de I, $f''(x) \leq 0$
$\Leftrightarrow$ pour tout x de I, f' est **décroissante**.

Exemple : La fonction exponentielle est **convexe** sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée seconde qui est elle-même est positive. La fonction racine carrée est concave sur $]0;+\infty[$ car toutes ses tangentes sont au-dessus de la courbe de la fonction racine carrée.

Remarque : (C_f) est **au-dessus** de ses tangentes $\Leftrightarrow$ Les tangentes sont **en dessous** de (C_f) $\Leftrightarrow$ f convexe
(C_f) est **en dessous** de ses tangentes $\Leftrightarrow$ Les tangentes sont **au-dessus** de (C_f) $\Leftrightarrow$ f concave
La définition avec les sécantes n'est qu'anecdotique, retenez la première et troisième définitions.

Inégalités de convexité :

— Pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^x \geq x + 1$

— Pour tout x de $[0;+\infty[$: $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(x+1)$

Remarque : La définition du nombre dérivé, vue en Première Spécialité, n'est pas tellement importante pour le bac puisque la définition n'est pas exigée !

Il suffit de connaître et de savoir appliquer les formules usuelles de dérivation, mais il est important de connaître la définition pour mieux comprendre les formules.

> **Définition :**
> Une fonction f admet un **point d'inflexion** lorsque $f'' = 0$ **ET** lorsque f'' change de **signe**. D'un point de vue graphique, (C_f) admet un point d'inflexion en a lorsque la tangente en a est traversée par (C_f).

Le savez-vous ? Vous pouvez gagner 0,25 points sur votre copie du bac en une phrase ! Lorsque vous vous apprêtez à dériver une fonction f, voici la phrase à dire :

> **"f est dérivable sur [ensemble de dérivabilité de f] en tant que [somme ?]/[produit ?]/[quotient ?]/[composée ?] de deux fonctions dérivables sur [ensemble de dérivabilité de f]** ." En revanche, vous ne gagnerez pas de points si dans le sujet, on vous dit qu'on admet que la fonction est dérivable sur ...

V) Exercices :

Exercice 1 (5 points) :

Dériver les fonctions suivantes (le domaine de dérivabilité n'est pas exigé) :

— $a(x) = e^{2x-3}$

— $b(x) = (x^2) \cdot (e^{-2x})$

— $c(x) = \cos(\sin(x))$

— $d(x) = \dfrac{\sqrt{e^x}}{x}$

— $f(x) = e^{1/\sqrt{x}}$

Exercice 2 : (3 points)

1. Déterminer la dérivée seconde de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$
2. Étudier la convexité de f (convexité, concavité, éventuellement des points d'inflexion)

Exercice 3 : (4 points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x-1) \cdot e^x$

Dresser le tableau de variation **complet** (variations de f + signe de f' + signe de f'')

Exercice 4 : (3 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x - 1$.

1. Calculer $f'(x)$
2. Calculer $f''(x)$. En déduire la convexité de f
3. Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^x \geq x + 1$

Exercice 5 : (5 points)

Exercice qui ne tombera jamais au bac mais qu'il faut tester !

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

1. Calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$.
2. On pose la suite (u_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par : $u_n = f^{(n)}(x)$ ($f^{(n)}$ signifie la dérivée n-ième de f)

   Établir une expression de u_n en fonction de n. (je ne demande pas de prouver la conjecture par récurrence)

VI) Corrections

Exercice 1 :

Je donne directement le résultat.

$a'(x) = 2e^{2x-3}$
$b'(x) = 2x \cdot e^{-2x} \cdot (1-x)$
$c'(x) = -\cos(x) \cdot \sin(\sin(x))$
$d'(x) = \dfrac{(x-2) \cdot \sqrt{e^x}}{2x^2}$
$f'(x) = -\dfrac{e^{1/\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}}$

Exercice 2 :

On a f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$
Pour tout x de $\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} \\ &= \frac{e^x(x-1)}{x^2} \end{aligned}$$

$f'(x) = \dfrac{(x-1) \cdot e^x}{x^2}$

Pour tout x de $\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{e^x(x-1) \cdot x^2 - (x-1)e^x \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{e^x(x-1)(x^2-2x)}{x^4} \\ &= \frac{e^x(x-1)(x)}{x^3} \cdot (x-2) \\ &= \frac{e^x(x-1)(x-2)}{x^3} \end{aligned}$$

Ainsi, on a :
$f''(x) = \dfrac{(x^2-2x+2) \cdot e^x}{x^3}$

• Pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $x^2 - 2x + 2 > 0$ (car $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$)
Ainsi, $f''(x)$ est du signe de x^3.

• Pour $x < 0$, $x^3 < 0$, donc $f''(x) < 0$ et pour $x > 0$, $x^3 > 0$, donc $f''(x) > 0$

Conclusion :

— $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

— $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Donc f est **concave** sur $]-\infty; 0[$ et est **convexe** sur $]0; +\infty[$ (f n'admet pas de point d'inflexion).

Exercice 3 :

On a $g(x) = (x-1) \cdot e^x$

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^x + (x-1) \cdot e^x \\ &= e^x(1 + x - 1) \\ &= x \cdot e^x \end{aligned}$$

Ainsi, on a : $g'(x) = x \cdot e^x$

Puisque $e^x > 0$, alors $g'(x)$ est du signe de x.

— Pour $x = 0$, $g'(x) = 0$

— Pour $x < 0$, $g'(x) < 0$

— Pour $x > 0$, $g'(x) > 0$

Donc g est **décroissante** sur $]-\infty; 0[$, **admet un minimum** en 0 et est **croissante** sur $]0; +\infty[$.

On a :

$$\begin{aligned} g''(x) &= e^x + x \cdot e^x \\ &= e^x(1 + x) \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée seconde est définie par : $g''(x) = (x+1) \cdot e^x$

Puisque $e^x > 0$, alors $g''(x)$ est du signe de $x + 1$.

— Pour $x = -1$, $g''(x) = 0$
— Pour $x < -1$, $g''(x) < 0$
— Pour $x > -1$, $g''(x) > 0$

Donc g est **concave** sur $]-\infty; -1[$, **admet un point d'inflexion** en -1 et est **convexe** sur $]-1; +\infty[$. Si l'on nomme A le point d'inflexion à la courbe de g, alors $A(-1; g(-1))$, **donc** $A(-1; -2/e)$.

Exercice 4 :

On a pour x dans $\mathbb{R}$: $f(x) = e^x - x - 1$.
1) Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = e^x - 1$$

Donc, la dérivée de f, notée $f'(x)$ est définie par : $f'(x) = e^x - 1$

2) Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f''(x) = e^x$$

Donc, la dérivée seconde de f, notée $f''(x)$ est définie par : $f''(x) = e^x$

Pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^x > 0$

Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

3) On sait que la fonction exponentielle est **convexe** sur $\mathbb{R}$. Ainsi, en posant $g(x) = e^x$ et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé, alors (C_g) est **au-dessus** de toutes ses **tangentes**. Puisque (C_g) est **au-dessus** de toutes ses **tangentes**, il en est de même pour **la tangente en** 0.

Nommons T_0 la tangente en 0. (Formule : $(T_0) : y = g'(0) \cdot (x - 0) + g(0)$)
$g'(0) = e^0 = 1$ et $g(0) = e^0 = 1$

$$\text{Donc : } (T_0) : y = 1 \cdot (x - 0) + 1$$
$$\Leftrightarrow (T_0) : y = x + 1$$

On a (C_g) au-dessus de (T_0), donc : $e^x \geq x + 1$

Exercice 5 :

On a : $f(x) = \frac{1}{x}$, pour x dans $\mathbb{R}^*$.

1)

On a immédiatement la dérivée de f : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

On en déduit la dérivée seconde de f : $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

2) En posant $u_n = f^{(n)}(x)$, on a :

$$u_0 = \frac{1}{x}$$
$$u_1 = -\frac{1}{x^2}$$
$$u_2 = \frac{2}{x^3}$$
$$u_3 = -\frac{6}{x^4}$$

On conjecture alors que :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} : u_n = (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n}{x^{n+1}}$$
$$\Leftrightarrow u_n = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$$

On en déduit donc une expression de la suite en fonction de n en conjecturant : $u_n = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$

Alors, tu as eu combien ? Si tu es toujours aussi chaud, va voir les autres cours dans la rubrique *Mathématiques* pour cartonner le bac !