Primitives et Equations Différentielles

17 avril 2025

Avant de commencer, je vous conseille fortement de faire sérieusement les exemples proposés qui sont formateurs et vous préparent pour le bac ! Si vous savez faire les exemples, vous êtes plus que prêt pour le bac ! Regarder la solution APRES avoir cherché !

1 Primitives

Définition. ***1*** *:*
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle ***primitive*** *de la fonction f sur I notée F lorsque pour tout x de I : $F'(x) = f(x)$*

Exemple : ***Déterminer une primitive de*** $2x$**.**

Solution : On sait que $(x^2)' = 2x$, donc x^2 est **une primitive** de $2x$.

Remarque. *: Certes x^2 est* ***une primitive*** *de $2x$ (et je dis bien* ***UNE*** *primitive), mais $x^2 + 2$ est aussi* ***une primitive*** *de $2x$ puisque $(x^2 + 2)' = 2x$.*

Conséquence. *: Il existe une* ***infinité de primitives*** *pour une fonction f donnée* ***continue****.*

Théorème. *: Toute fonction* ***continue*** *sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet* ***des primitives*** *sur I.*

Remarque. *: Pour écrire toutes les primitives de $2x$, on écrira que : l'ensemble des primitives de $2x$ sont les fonctions qui s'écrivent :* $\{x \mapsto x^2 + C, C \in \mathbb{R}\}$.

Propriété. *: **Primitives de fonctions usuelles et composées***

- $a \mapsto ax + C$
- x^n, *avec* n *dans* $\mathbb{N} \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- $\frac{1}{x} \mapsto \ln(|x|) + C$ *(**attention !!** Dans le ln, il faut une **quantité strictement positive** !)*
- $\frac{1}{\sqrt{x}} \mapsto 2\sqrt{x} + C$
- $e^x \mapsto e^x + C$
- $\cos(x) \mapsto \sin(x) + C$
- $\sin(x) \mapsto -\cos(x) + C$
- $-\frac{1}{x^2} \mapsto \frac{1}{x} + C$
- $u' + v' \mapsto u + v + C$
- $u'v + uv' \mapsto uv + C$
- $\frac{u'v-uv'}{v^2} \mapsto \frac{u}{v} + C$
- $-\frac{u'}{u^2} \mapsto \frac{1}{u} + C$
- $\frac{u'}{\sqrt{u}} \mapsto 2\sqrt{u} + C$
- $\frac{u'}{u} \mapsto \ln(|u|) + C$
- $u' \cos(u) \mapsto \sin(u) + C$
- $u' \sin(u) \mapsto -\cos(u) + C$
- $u'e^u \mapsto e^u + C$

Remarque. *: Ce tableau n'est **PAS** à apprendre par cœur, puisque vous êtes censés connaître **le tableau de dérivation** !*

2 Equations différentielles

Définition. *1 :*

- *Une* ***équation différentielle*** *est une équation ayant pour inconnue une* ***fonction****. Une équation différentielle est une* ***relation*** *faisant intervenir une* ***fonction inconnue*** *d'une variable réelle x appartenant à un intervalle I de $\mathbb{R}$ et certaines de* ***ses dérivées successives****.*
- *Une* ***équation différentielle*** *est dite du* ***premier ordre*** *lorsque la relation qui la définit* ***comporte explicitement et seulement*** *la* ***dérivée première de la fonction inconnue.***
- *Une* ***fonction solution de l'équation différentielle est appelée solution particulière de cette équation.***

Remarque. *: Pour simplifier l'écriture d'une équation différentielle, on note l'inconnue (qui est une* ***fonction****) y au lieu de $y(x)$. Nous n'étudierons que les équations différentielles du premier ordre à coefficients constants en Terminale Spécialité.*

2.1 Equations différentielles du type : $y' = ay$

Propriété. *1 : Soit a un réel non nul. Soit $(E) : y' = ay$ une* ***équation différentielle définie*** *sur $\mathbb{R}$. La* ***solution générale*** *de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent : $y(x) = Ce^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$*

Exemples : ***Résoudre les équations différentielles suivantes :***

(1). $y' = 5y$
(2). $2y' = 3y$
(3). $-3y' + 5y = 0$

Solution :

- (1).

$$\boxed{S_1 = \{x \mapsto Ce^{5x}, C \in \mathbb{R}\}}$$

- (2).

$$2y' = 3y \quad (1)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3}{2}y \quad (2)$$

$S_2 = \{x \mapsto Ce^{\frac{3}{2}x}, C \in \mathbb{R}\}$

— (3).

$$-3y' + 5y = 0 \quad (3)$$
$$\Rightarrow -3y' = -5y \quad (4)$$
$$\Rightarrow y' = \frac{5}{3}y \quad (5)$$

$S_3 = \{x \mapsto Ce^{\frac{5}{3}x}, C \in \mathbb{R}\}$

Définition. *2 :*

- *Pour une équation différentielle du premier ordre, on peut imposer la valeur en un réel x_0 de la solution cherchée : Cette condition est appelée la **condition initiale**.*
- *On appelle **problème de Cauchy** (terme à ne pas retenir) le système : $\begin{cases} y' = ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$. Autrement dit, un problème de Cauchy consiste à trouver **l'unique** solution de l'équation différentielle vérifiant **une condition initiale**.*

Théorème. *1 : Un problème de Cauchy admet une **unique solution.***

Exemple : ***Déterminer l'unique solution f vérifiant le problème de Cauchy suivant :*** $\begin{cases} -3y' + 5y = 0 \\ f(1) = 2 \end{cases}$

Solution : Soit f vérifiant le problème de Cauchy. On sait que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $-3y' + 5y = 0$ sont les fonctions qui s'écrivent : $x \mapsto Ce^{\frac{5}{3}x}, C \in \mathbb{R}$. On pose : $f(x) = Ce^{\frac{5}{3}x}$ et $f(1) = 2$. Alors :

$$f(1) = 2 \quad (6)$$
$$\Rightarrow Ce^{\frac{5}{3}\cdot 1} = 2 \quad (7)$$
$$\Rightarrow Ce^{\frac{5}{3}} = 2 \quad (8)$$
$$\Rightarrow C = 2e^{-\frac{5}{3}} \quad (9)$$

Conclusion. *: L'**unique solution** f vérifiant le problème de Cauchy est la fonction définie par :* $f(x) = 2(e^{-\frac{5}{3}})e^{\frac{5}{3}x} \Rightarrow f(x) = 2e^{\frac{5}{3}(x-1)}$

2.2 Equations différentielles du type : $y' = ay + b$

Propriété. *1 : Soit a un réel non nul et b un réel. Soit $(E) : y' = ay+b$ une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$. La **solution générale** de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent :*
$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.

Exemples : *Résoudre les équations différentielles suivantes :*
(1). $y' = 2y + 3$

(2). $y' = -y + 1$
(3). $-2y' + 3y = 1$

Solution :
— (1).

$$S_1 = \{x \mapsto Ce^{2x} - \tfrac{3}{2}, C \in \mathbb{R}\}$$

— (2).

$$S_2 = \{x \mapsto Ce^{-x} - \tfrac{1}{-1}, C \in \mathbb{R}\}$$

— (3).

$$-2y' + 3y = 1 \tag{10}$$
$$\Rightarrow -2y' = -3y + 1 \tag{11}$$
$$\Rightarrow y' = \frac{3}{2}y - \frac{1}{2} \tag{12}$$

$$S_3 = \{x \mapsto Ce^{\frac{3}{2}x} + \tfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}, C \in \mathbb{R}\} \Rightarrow S_3 = \{x \mapsto Ce^{\frac{3}{2}x} + \tfrac{1}{3}, C \in \mathbb{R}\}$$

Définition. *2 :*

— *On appelle* ***problème de Cauchy*** *(terme à ne pas retenir) le système :* $\begin{cases} y' = ay + b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ *. Autrement dit, un problème de Cauchy consiste à trouver* ***l'unique*** *solution de l'équation différentielle vérifiant une* ***condition initiale****.*

Exemple : ***Résoudre le problème de Cauchy suivant*** : $\begin{cases} y' = -y + 1 \\ g(1) = 0 \end{cases}$

Solution : Soit g **l'unique solution** au problème de Cauchy. On sait que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = -y+1$ sont les fonctions du type : $x \mapsto Ce^{-x} + 1$, $C \in \mathbb{R}$. Soit g une solution particulière de l'équation différentielle vérifiant $g(1) = 0$. Alors :

$$g(1) = 0 \tag{13}$$

$$\Rightarrow Ce^{-1} + 1 = 0 \tag{14}$$

$$\Rightarrow Ce^{-1} = -1 \tag{15}$$

$$\Rightarrow C = -e \tag{16}$$

Conclusion. *:* ***L'unique solution*** *g vérifiant le problème de Cauchy est la fonction définie par : $g(x) = -e \cdot e^{-x} + 1 \Rightarrow g(x) = -e^{1-x} + 1$.*

Définition. *3 : Soit (E) : $y' = ay + b$, avec a non nul et $b \in \mathbb{R}$. On pose (E') : $y' = ay$ ($b = 0$). On dit que (E') est* ***l'équation homogène associée à*** *(E).*

Théorème. *1 :*

— *Pour déterminer l'****ensemble des solutions*** *d'une équation différentielle (E),* ***il faut et il suffit*** *de déterminer* ***une solution particulière*** *de (E) et de déterminer* ***l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.***

— *Si l'on note S l'ensemble des solutions de (E), S_H l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée et y_P une solution particulière de (E), alors : $S = y_P + S_H$*

Remarque. *: Pour les équations différentielles du type : $y' = ay + b$,* ***une solution particulière*** *est la fonction $x \mapsto -\frac{b}{a}$ et* ***l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée*** *est : $x \mapsto Ce^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$. Ainsi : $S = \{x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}, C \in \mathbb{R}\}$.*

2.3 Equations différentielles du type : $y' = ay + f$.

Propriété. *1 : Soit a un réel non nul et f une fonction* ***continue****. Soit (E) : $y' = ay + f$ une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$. La solution générale de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent : $y(x) = Ce^{ax} + f_0$, $C \in \mathbb{R}$, avec f_0 une* ***solution particulière*** *de (E) à déterminer.*

Remarque. *: On vous donnera* ***TOUJOURS*** *une* ***solution particulière pour les équations différentielles de ce type****. Il vous suffit simplement de* ***démontrer que cette solution particulière est bien solution de l'équation différentielle.***

III) Exercices :

Exercice 1 (10 points) :

Déterminer une primitive des fonctions suivantes (pas d'IPP pour ceux qui savent) :

— (1). $f(x) = 3x + 7$
— (2). $f(x) = 2xe^{-x^2}$
— (3). $f(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$
— (4). $f(x) = \cos(x)\sin(x)$
— (5). $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$
— (6). $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
— (7). $f(x) = \cos(2x)$
— (8). $f(x) = e^{2x+3}$
— (9). $f(x) = x \cdot e^x$ (oui oui sans IPP !)
— (10). $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

Exercice 2 (4 points) :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

— $(E1) : -y' = 2y$
— $(E2) : 3y' = -6y + 3$

— $(E3) : -y' + 2y = 0$
— $(E4) : 4y' - 5y + 4 = 0$

Exercice 3 (6 points) :

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + y = \frac{1}{1+e^x}$

1. Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = (e^{-x})\ln(1 + e^x)$ est solution particulière de (E).
2. On pose $(E') : y' + y = 0$ l'équation homogène associée à (E). Résoudre l'équation (E').
3. Soit f une solution de (E). Démontrer que f solution de $(E) \Leftrightarrow f - f_0$ est solution de (E').
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
5. Déterminer la fonction g vérifiant le problème de Cauchy suivant : $\begin{cases} y' + y = \frac{1}{1+e^x} \\ g(0) = 2 \end{cases}$

IV) Corrections

Exercice 1 :

En notant F une primitive de f, on a :

— (1). $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 7x$
— (2). $F(x) = -e^{-x^2}$
— (3). $F(x) = x + \frac{1}{x+1}$
— (4). $F(x) = \frac{1}{2}(\sin(x))^2$
— (5). $F(x) = x - 4\ln(|x + 2|)$
— (6). $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
— (7). $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$
— (8). $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+3}$

Je vais détailler la (9).

$$
\begin{aligned}
x \cdot e^x &= (x + 1 - 1) \cdot e^x \quad \text{(astuce : +1-1)} \\
&\Leftrightarrow x \cdot e^x = (x - 1 + 1) \cdot e^x \\
&\Leftrightarrow x \cdot e^x = (x - 1) \cdot e^x + 1 \cdot e^x \\
&\Leftrightarrow x \cdot e^x = (x - 1) \cdot e^x + (x - 1)' \cdot e^x \\
&\Leftrightarrow x \cdot e^x = (x - 1) \cdot (e^x)' + (x - 1)' \cdot e^x \quad \text{(on fait apparaître } u'v + uv')
\end{aligned}
$$

Ainsi : $f(x) = (x - 1) \cdot (e^x)' + (x - 1)' \cdot e^x$, donc $F(x) = (x - 1) \cdot e^x$ (uv)

Conclusion : $F(x) = (x-1) \cdot e^x$

Je vais aussi la détailler.

$$\begin{aligned} x \cdot \sqrt{x^2+1} &= x \cdot (x^2+1)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (x^2+1)^{1/2} \quad \text{(faire apparaître } (n+1)u'u^n\text{)} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (x^2+1)^{1/2} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2x \cdot (x^2+1)^{1/2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot (1+\frac{1}{2}) \cdot (x^2+1)' \cdot (x^2+1)^{1/2} \end{aligned}$$

Donc $f(x) = \frac{1}{3} \cdot (1+\frac{1}{2}) \cdot (x^2+1)' \cdot (x^2+1)^{1/2}$,

donc $F(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^2+1)^{(1+1/2)} = \frac{1}{3} \cdot (x^2+1)^{3/2}$.

Conclusion : $F(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^2+1)^{3/2}$.

Exercice 2 :

— $(E1) : -y' = 2y \Leftrightarrow y' = -2y$.

Ainsi : $S_1 = \{x \mapsto Ce^{-2x}, C \in \mathbb{R}\}$

— $(E2) : 3y' = -6y + 3 \Leftrightarrow y' = -2y + 1$.

Ainsi : $S_2 = \{x \mapsto Ce^{-2x} + \frac{1}{2}, C \in \mathbb{R}\}$

— $(E3) : -y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = 2y$

Ainsi : $S_3 = \{x \mapsto Ce^{2x}, C \in \mathbb{R}\}$

— $(E4) : 4y' - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{5}{4}y - 1$

Ainsi : $S_4 = \{x \mapsto Ce^{(\frac{5}{4})x} + \frac{4}{5}, C \in \mathbb{R}\}$

Exercice 3 :

1)

— f_0 est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ en tant que **produit** de **deux fonctions dérivables** sur $\mathbb{R}$. (puisque $x \mapsto 1+e^x > 0$)

On pose : $u(x) = e^{-x} \Rightarrow u'(x) = -e^{-x}$ et $v(x) = \ln(1+e^x) \Rightarrow v'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

Formule : $(uv)' = u'v + uv'$

Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_0'(x) &= -e^{-x} \cdot \ln(1+e^x) + e^{-x} \cdot \frac{e^x}{1+e^x} \\ &\Leftrightarrow f_0'(x) = -e^{-x} \cdot \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} \\ &\Leftrightarrow f_0'(x) = -f_0(x) + \frac{1}{1+e^x} \\ &\Leftrightarrow f_0'(x) + f_0(x) = \frac{1}{1+e^x} \end{aligned}$$

‘

D'où f_0 solution particulière de (E).

2) On pose (E') : $y' + y = 0$ **l'équation homogène associée** à (E)

$S_{E'} = \{x \mapsto Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}\}$

3) $f - f_0$ est solution de $(E') \Leftrightarrow (f-f_0)' + (f-f_0) = 0$

$\Leftrightarrow f' - f_0' + f - f_0 = 0$ (**par linéarité de la dérivation**)

$\Leftrightarrow f' + f = f_0' + f_0$

Ainsi : pour tout x de $\mathbb{R}$:

$f'(x) + f(x) = f_0'(x) + f_0(x) \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ (d'après 1)

$\Leftrightarrow f$ est solution de (E), d'où **l'équivalence**.

4) Ainsi :

$$\begin{aligned} S_E &= \{x \mapsto Ce^{-x} + f_0(x), C \in \mathbb{R}\} \\ &\Leftrightarrow S_E = \{x \mapsto Ce^{-x} + (e^{-x})\ln(1+e^x), C \in \mathbb{R}\} \\ &\Leftrightarrow S_E = \{x \mapsto (e^{-x})(C + \ln(1+e^x)), C \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

D'où : $\mathrm{S}_E = \{x \mapsto (e^{-x})(C + \ln(1 + e^x)), C \in \mathbb{R}\}$

5) Soit g vérifiant le problème de Cauchy : $\begin{cases} y' + y = \frac{1}{1+e^x} \\ g(0) = 2 \end{cases}$.

Alors, g vérifie (E) et $g(0) = 2$.

Donc : $g(0) = 2 \Leftrightarrow (e^{-0})(C + \ln(1 + e^0)) = 2 \Leftrightarrow C = 2$

Conclusion : L'**unique solution** au problème de Cauchy est la fonction g définie par : $g(x) = (e^{-x})(2 + \ln(1 + e^x))$.

Alors, tu as eu combien ? Si tu es toujours aussi chaud, je te conseille d'aller voir les autres cours disponibles dans la rubrique *"Mathématiques"* afin de cartonner pour le bac !