Géométrie dans l'espace

Dans ce chapitre, $\mathcal{E}$ désigne un **espace affine.**

Définition 1 : Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs **non colinéaires** de l'espace $\mathcal{E}$. $\overrightarrow{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ si, et seulement si il existe deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{w} = a \cdot \overrightarrow{u} + b \cdot \overrightarrow{v}$

Conséquence-Définition 2 :
Si un vecteur $\overrightarrow{w}$ s'écrit comme **combinaison linéaire de deux autres vecteurs** $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ étant non colinéaires, alors les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **coplanaires**.

Définition 3 : Une **droite de l'espace** $\mathcal{E}$ est définie par **deux points distincts** ou bien d'**un point et d'un vecteur directeur**.

Définition 4 : Un **plan de l'espace** $\mathcal{E}$ est défini par **trois points non-alignés** ou bien d'**un point et de deux vecteurs non-colinéaires.**

Propriété 1 : Soient deux droites (D) et (D') dans $\mathcal{E}$. Nous disposons de 2 cas :
Cas 1 : (D) et (D') sont **incluses** dans un même plan $\Leftrightarrow$ (D) et (D') sont **coplanaires**.
Cas 2 : (D) et (D') **ne sont pas incluses** dans un même plan $\Leftrightarrow$ (D) et (D') **ne sont pas coplanaires**.

Propriété 2 : Soient une droite (D) et un plan $(\wp)$ de $\mathcal{E}$. Nous disposons de 3 cas :
Cas 1 : (D) est **strictement parallèle** à $(\wp)$.
Cas 2 : (D) est **incluse** dans $(\wp)$.
Cas 3 : (D) est **sécante** à $(\wp)$.

Propriété 3 : Soient deux plans $(\wp)$ et $(\wp')$. Nous disposons de 3 cas :
Cas 1 : $(\wp)$ et $(\wp')$ sont **strictement parallèles**.
Cas 2 : $(\wp)$ et $(\wp')$ sont **confondus**.
Cas 3 : $(\wp)$ et $(\wp')$ sont **sécants**.

Propriété 4 :
- Une **droite** (D) sera **strictement parallèle** à un **plan** $(\wp)$ $\Leftrightarrow$ (D) est **parallèle à une droite** (D') avec (D') **incluse** dans $(\wp)$

Propriété 5 : Relation de Chasles
Si A, B et C sont trois points de l'espace $\mathcal{E}$, alors : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Définition 5 : Les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ forment **une base** de $\mathcal{E}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ **ne sont pas coplanaires**.

Conséquence : Trois vecteurs coplanaires de l'espace ne forment pas une base de $\mathcal{E}$.

Propriété 6 :
Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base de $\mathcal{E}$. Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace $\mathcal{E}$ peut s'écrire de manière **unique** comme une **combinaison linéaire des vecteurs** $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$.
$\exists!\ (x; y; z)$: $\overrightarrow{u} = x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j} + z \cdot \overrightarrow{k}$ et $(x; y; z)$ correspond aux coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Propriété 7 :
On appelle **repère** $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de l'espace $\mathcal{E}$ avec O l'**origine du repère** et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une **base** de $\mathcal{E}$.

Conséquence :
Soit un repère $R = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Pour tout point M de $\mathcal{E}$, il existe un **unique triplet** $(x; y; z)$ tel que : $\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j} + z \cdot \overrightarrow{k}$
• x correspond à l'**abscisse** • y correspond à l'**ordonnée** • z correspond à la **cote**

Propriété 8 : Soient deux points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$. On a :
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Propriété 9 : Représentation paramétrique d'une droite :
On se place dans un repère $R = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de l'espace $\mathcal{E}$. Soit (D) la droite passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(a; b; c)$.
Alors : pour tout point $M(x; y; z) \in (D)$: $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{u} \tag{1}$$
$$\Leftrightarrow (x - x_A; y - y_A; z - z_A) = k \cdot (a; b; c) \tag{2}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = k \cdot a \\ y - y_A = k \cdot b \\ z - z_A = k \cdot c \end{cases} \tag{3}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + k \cdot a \\ y = y_A + k \cdot b \\ z = z_A + k \cdot c \end{cases} \tag{4}$$

Les étapes à suivre afin de construire une section d'un solide par un plan :
De manière générale, on vous donne une représentation du solide. Concernant les cubes :
(1). On regarde les arêtes que le plan traverse : on regarde les arêtes que le plan "rencontre"
(2). Sur chaque arête traversée, on place le point d'intersection avec le plan.
(3). Relier les points d'intersections via ces règles..

Règles :

(1). Si deux points A et B appartiennent à la fois à la section et à une face du cube, alors le plan coupe sur le segment $[AB]$.

(2). On peut prolonger si l'on souhaite les droites de deux faces consécutives pour avoir des points d'intersection avec le plan de la section.

(3). Le segment de section sur une face est parallèle à celui de la face opposée du cube.

(4). Les segments de sections sur les faces latérales gauches et arrières du cube sont tracés en pointillés.

Si tu es toujours aussi chaud, je te conseille d'aller voir les autres cours disponibles dans la rubrique *"Mathématiques"* afin de cartonner pour le bac !