Intégration

Avant de commencer, je vous conseille fortement de faire sérieusement les exemples proposés qui sont formateurs et vous préparent pour le bac ! Si vous savez faire les exemples, vous êtes plus que prêt pour le bac ! Regarder la solution APRES avoir cherché !

1 Intégration et calcul intégral

Définition 1 :

Soit f une fonction **continue et positive** sur $[a;b]$ et on note (C_f) sa courbe représentative dans un **repère orthonormé**. On définit alors l'**intégrale** de f, notée $\int_a^b f(x)dx$ comme étant **l'aire** entre (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire.

Théorèmes :

- Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a;b]$. La fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est **dérivable** sur $[a;b]$ et a pour dérivée f.
- **Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.**

Définition 2 :

- Soit f une **fonction continue et positive** sur $[a;b]$. En notant F une primitive de f sur $[a;b]$, on a : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
- Dès lors, on définit **l'intégrale** de a et b le nombre réel définie par : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Propriété 1 :

Soit λ et μ deux réels. On considère deux fonctions f et g continues sur $[a;b]$. Alors :

- $\int_a^b \mu f(x)dx = \mu \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$.

Propriété 2 (Relation de Chasles) :

Soient a, b, c des réels. Alors :

- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Propriété 3 :

Soit a, b dans $\mathbb{R}$.

- Pour tout x de $[a;b]$: $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
- Pour tout x de $[a;b]$: $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Exemple :

Calculer $\int_1^2 (x^3 + 5x - 1)dx$

Solution :

$$\begin{align}
\int_1^2 (x^3 + 5x - 1)dx &= \int_1^2 x^3 dx + \int_1^2 5x dx + \int_1^2 (-1)dx \tag{1}\\
&= \int_1^2 x^3 dx + 5\int_1^2 x dx - \int_1^2 dx \tag{2}\\
&= \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 + 5\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 - [x]_1^2 \tag{3}\\
&= \frac{1}{4}(2^4 - 1^4) + \frac{5}{2}(2^2 - 1^2) - (2-1) \tag{4}\\
&= \frac{16}{4} - \frac{1}{4} + 10 - \frac{5}{2} - 1 \tag{5}\\
&= \frac{15}{4} + 9 - \frac{5}{2} - 1 \tag{6}\\
&= \frac{41}{4} \tag{7}
\end{align}$$

Donc : $\int_1^2 (x^3 + 5x - 1)dx = \frac{41}{4}$

Propriété 4 (Intégration par parties) :

Soit u et v deux **fonctions dérivables** sur $[a;b]$ avec u' et v' leurs dérivées étant **continues** sur $[a;b]$. On a :
$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

Exemple :

Calculer : $\int_1^e x\ln(x)dx$

Solution :

On pose : $u'(x) = x \Rightarrow u(x) = \frac{1}{2}x^2$ et $v(x) = \ln(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_1^e x\ln(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}dx \quad (8)$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e \frac{x^2}{x}dx \quad (9)$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx \quad (10)$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e \quad (11)$$

$$= \frac{1}{2}e^2\ln(e) - \frac{1}{2}1^2\ln(1) - \frac{1}{4}(e^2 - 1^2) \quad (12)$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2 - 1) \quad (13)$$

$$= \frac{1}{4}(2e^2 - e^2 + 1) \quad (14)$$

$$= \frac{1}{4}(e^2 + 1) \quad (15)$$

Conclusion : $\int_1^e x\ln(x)dx = \frac{1}{4}(e^2+1)$

Propriété 5 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On appelle **valeur moyenne de** f sur $[a;b]$ le nombre réel μ tel que :
$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Propriété 6 :

- Soient f et g deux fonctions **continues** sur $[a;b]$, et on note respectivement (C_f) et (C_g) leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé. On définit alors **l'aire**, exprimée en unité d'aire, du domaine délimité par les courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ comme étant égale à : $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$
- **L'aire** du domaine délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à : $\int_a^b |f(x)|dx$

2 Exercices

Exercice 1 (10 points) :

Calculer les intégrales suivantes :

- $I_1 = \int_1^2 (\frac{1}{3}x^2 - x + 3)dx$
- $I_2 = \int_1^3 \frac{1}{(x+1)^2}dx$
- $I_3 = \int_2^e \frac{x+1}{x+2}dx$
- $I_4 = \int_e^{2e} \frac{1}{x\ln(x)}dx$
- $I_5 = \int_2^3 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$
- $I_6 = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin(x)\cos(x)dx$

- $I_7 = \int_{\ln(2)}^{2\ln(2)} \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx$
- $I_8 = \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$
- $I_9 = \int_{\ln(2)}^{e} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} dx$
- $I_{10} = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx$

Exercice 2 (4 points) :

A l'aide d'intégration(s) par parties, calculer :

- $I_1 = \int_e^{ne} \ln(x^n) dx$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
- $I_2 = \int_{\ln(2)}^{2} xe^x dx$
- $I_3 = \int_e^{\pi} \cos(x)e^x dx$

  Calculer la valeur moyenne de f sur $[e; \pi]$ par : $f(x) = \cos(x)e^x$

Exercice 3 (6 points) :

Soit la suite d'intégrales (I_n) définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{e^x(1-x)^n}{n!} dx$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que pour tout x de $[0; 1]$: $0 \leq e^x(1-x)^n \leq e$
2. En déduire que (I_n) converge vers 0.
3. En effectuant une intégration par parties, démontrer que : pour tout n de $\mathbb{N}$: $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$
4. Calculer I_0 et I_1.
5. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $I_n = I_0 - (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n!}) \Leftrightarrow I_n = I_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$
6. En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + 1 = e$

III) Corrections

Exercice 1 :

1. $I_1 = \int_1^2 \left(\frac{1}{3}x^2 - x + 3\right) dx$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x dx + \int_1^2 3 dx \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 + [3x]_1^2 \\
&= \frac{1}{9}(2^3 - 1^3) - \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) + 3(2-1) \\
&= \frac{7}{9} - \frac{3}{2} + 3 \\
&= \frac{41}{18}
\end{aligned}$$

Ainsi : $I_1 = \frac{41}{18}$

2. $I_2 = \int_1^3 \frac{1}{(x+1)^2} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^3 \frac{(x+1)'}{(x+1)^2} dx \\
&= -\left[\frac{1}{x+1}\right]_1^3 \\
&= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\textbf{Donc } I_2 = \tfrac{1}{4}}$$

3. $I_3 = \int_2^e \frac{x+1}{x+2} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_2^e \frac{x+1+(1-1)}{x+2} dx \text{ (\textbf{technique du malin} : (+1-1))} \\
&= \int_2^e \frac{x+2-1}{x+2} dx \\
&= \int_2^e \left(\frac{x+2}{x+2} - \frac{1}{x+2}\right) dx \\
&= \int_2^e \frac{x+2}{x+2} dx - \int_2^e \frac{1}{x+2} dx \\
&= \int_2^e dx - \int_2^e \frac{(x+2)'}{x+2} dx \\
&= [x]_2^e - [\ln(x+2)]_2^e \\
&= (e-2) - (\ln(e+2) - \ln(4)) \\
&= (e-2) + \ln \frac{4}{e+2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } I_3 = (e-2) + \ln \tfrac{4}{e+2}}$$

4. $I_4 = \int_e^{2e} \frac{1}{x\ln(x)} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_e^{2e} \frac{1/x}{\ln(x)} dx \text{ (propriété sur les fractions)} \\
&= \int_e^{2e} \frac{(\ln(x))'}{\ln(x)} dx \\
&= [\ln(\ln(x))]_e^{2e} \\
&= \ln(\ln(2e)) - \ln(\ln(e)) \\
&= \ln(\ln(2) + \ln(e)) - \ln(1) \\
&= \ln(1 + \ln(2))
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } I_4 = \ln(1 + \ln(2))}$$

5. $I_5 = \int_2^3 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx \\
&= 2\int_2^3 \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx \\
&= 2\int_2^3 (\sqrt{x})' e^{\sqrt{x}} dx \text{ (apparaître } u'e^u\text{)} \\
&= 2[e^{\sqrt{x}}]_2^3 \\
&= 2(e^{\sqrt{3}} - e^{\sqrt{2}})
\end{aligned}$$

D'où $I_5 = 2(e^{\sqrt{3}} - e^{\sqrt{2}})$

6. $I_6 = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin(x)\cos(x) dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin(x)(\sin(x))' dx \text{ (car } \sin'(x) = \cos(x)\text{)} \\
&= \left[\frac{1}{2}(\sin(x))^2\right]_{\pi/3}^{2\pi/3} \\
&= \frac{1}{2}((\sin(2\pi/3))^2 - (\sin(\pi/3))^2) \\
&= \frac{1}{2}((\sqrt{3}/2)^2 - (\sqrt{3}/2)^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où $I_6 = 0$

7. $I_7 = \int_{\ln(2)}^{2\ln(2)} \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\ln(2)}^{2\ln(2)} \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1} dx \text{ (identité remarquable)} \\
&= \int_{\ln(2)}^{2\ln(2)} (e^x - 1) dx \\
&= \int_{\ln(2)}^{2\ln(2)} e^x dx - \int_{\ln(2)}^{2\ln(2)} dx \\
&= [e^x]_{\ln(2)}^{2\ln(2)} - [x]_{\ln(2)}^{2\ln(2)} \\
&= e^{2\ln(2)} - e^{\ln(2)} - (2\ln(2) - \ln(2)) \\
&= (4-2) - \ln(2) \\
&= 2 - \ln(2)
\end{aligned}$$

Ainsi, $I_7 = 2 - \ln(2)$

8. $I_8 = \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_2^3 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} dx \\
&= \int_2^3 \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} dx \text{ (apparaître } u'/(2\sqrt{u})) \\
&= [\sqrt{1+x^2}]_2^3 \\
&= \sqrt{1+3^2} - \sqrt{1+2^2} \\
&= \sqrt{10} - \sqrt{5} \\
&= \sqrt{5}(\sqrt{2}-1)
\end{aligned}$$

D'où $I_8 = \sqrt{5}(\sqrt{2}-1)$

9. $I_9 = \int_{\ln(2)}^e \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\ln(2)}^e \frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}} dx \text{ (apparaître } u'/u) \\
&= [\ln(e^x + e^{-x})]_{\ln(2)}^e \\
&= \ln(e^e + e^{-e}) - \ln(e^{\ln(2)} + e^{-(\ln(2))}) \\
&= \ln(e^e + e^{-e}) - \ln(2 + 1/2) \text{ (car } -\ln(2) = \ln(1/2)) \\
&= \ln(e^e + e^{-e}) - \ln(5/2) \\
&= \ln\left(\frac{2(e^e + e^{-e})}{5}\right)
\end{aligned}$$

D'où $I_9 = \ln\left(\frac{2(e^e+e^{-e})}{5}\right)$

10. $I_{10} = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\pi/6}^{\pi/4} -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx \\
&= -\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx \\
&= -\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{(\cos(x))'}{\cos(x)} dx \text{ (apparaître } u'/u) \\
&= -[\ln(|\cos(x)|)]_{\pi/6}^{\pi/4} \text{ (ATTENTION : dans le ln, il faut une quantité } > 0 \text{ !)} \\
&= -[\ln(\cos(x))]_{\pi/6}^{\pi/4} \text{ (car } \cos(x) > 0 \text{ sur } [\pi/6; \pi/4]) \\
&= -(\ln(\cos(\pi/4)) - \ln(\cos(\pi/6))) \\
&= -(\ln(\sqrt{2}/2) - \ln(\sqrt{3}/2)) \\
&= \ln(\sqrt{3/2})
\end{aligned}$$

D'où $I_{10} = \ln(\sqrt{3/2})$

Exercice 2 :

1. $I_1 = \int_e^{n\cdot e} \ln(x^n)dx$

$$\begin{aligned} &= \int_e^{n\cdot e} n\ln(x)dx \\ &= n\int_e^{n\cdot e} \ln(x)dx \\ &= n\int_e^{n\cdot e} 1\cdot\ln(x)dx \end{aligned}$$

On effectue une I.P.P (**Intégration Par Parties**) :

On **pose** : $u'(x) = 1 \Rightarrow u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x) \Rightarrow v'(x) = 1/x$

$$\begin{aligned} I_1 &= n\left([x\ln(x)]_e^{n\cdot e} - \int_e^{n\cdot e}\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)dx\right) \\ &= n[x\ln(x)]_e^{n\cdot e} - n\int_e^{n\cdot e} dx \\ &= n(n\cdot e\ln(n\cdot e) - e\ln(e)) - n(n\cdot e - e) \\ &= n(n\cdot e(\ln(n)+\ln(e)) - e + e - n\cdot e) \\ &= n(n\cdot e(\ln(n)+1-1)) \\ &= n\cdot n\ln(n)\cdot e \\ &= (n^2)\ln(n)\cdot e \end{aligned}$$

D'où $I_1 = (n^2)\ln(n)\cdot e$, $n\in\mathbb{N}^*$

2. $I_2 = \int_{\ln(2)}^2 x\cdot e^x dx$

(I.P.P) :

On **pose** : $u'(x) = e^x \Rightarrow u(x) = e^x$ et $v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$

$$\begin{aligned} I_2 &= [x\cdot e^x]_{\ln(2)}^2 - \int_{\ln(2)}^2 (1\cdot e^x)dx \\ &= [x\cdot e^x]_{\ln(2)}^2 - \int_{\ln(2)}^2 e^x dx \\ &= [x\cdot e^x]_{\ln(2)}^2 - [e^x]_{\ln(2)}^2 \\ &= 2\cdot e^2 - \ln(2)\cdot e^{\ln(2)} - (e^2 - e^{\ln(2)}) \\ &= 2\cdot e^2 - 2\ln(2) + 2 - e^2 \\ &= e^2 - 2\ln(2) + 2 \end{aligned}$$

D'où $I_2 = e^2 - 2\ln(2) + 2$

3. $I_3 = \int_e^{\pi}(\cos(x)e^x)dx$

(Double I.P.P)

Intégration Par Parties numéro 1 :

On **pose** : $u'(x) = e^x \Rightarrow u(x) = e^x$ et $v(x) = \cos(x) \Rightarrow v'(x) = -\sin(x)$

$$\begin{aligned} I_3 &= [\cos(x)e^x]_e^\pi - \int_e^\pi (-\sin(x)\cdot e^x)dx \\ &= [\cos(x)e^x]_e^\pi + \int_e^\pi (\sin(x)\cdot e^x)dx \end{aligned}$$

Soit $J = \int_e^\pi (\sin(x)\cdot e^x)dx$

(I.P.P) :

Intégration Par Parties numéro 2 :

On **pose** $u'(x) = e^x \Rightarrow u(x) = e^x$ et $v(x) = \sin(x) \Rightarrow v'(x) = \cos(x)$

$$\begin{aligned} J &= [\sin(x)\cdot e^x]_e^\pi - \int_e^\pi (\cos(x)e^x)dx \\ &= [\sin(x)\cdot e^x]_e^\pi - I_3 \end{aligned}$$

Ainsi, on a : $I_3 = [\cos(x)e^x]_e^\pi + J$

Or : $J = [\sin(x)\cdot e^x]_e^\pi - I_3$

Donc :

$$\begin{aligned} I_3 &= [\cos(x)e^x]_e^\pi + [\sin(x)\cdot e^x]_e^\pi - I_3 \\ \Rightarrow 2\cdot I_3 &= [\cos(x)e^x]_e^\pi + [\sin(x)\cdot e^x]_e^\pi \\ \Rightarrow 2\cdot I_3 &= (\cos(\pi)\cdot e^\pi - \cos(e)\cdot e^e) + (\sin(\pi)\cdot e^\pi - \sin(e)\cdot e^e) \\ \Rightarrow 2\cdot I_3 &= -e^\pi - \cos(e)\cdot e^e - \sin(e)\cdot e^e \\ \Rightarrow 2\cdot I_3 &= -e^e(\cos(e)+\sin(e)) - e^\pi \\ \Rightarrow I_3 &= -\frac{1}{2}e^e(\cos(e)+\sin(e)) - \frac{1}{2}e^\pi \end{aligned}$$

D'où $I_3 = -\frac{1}{2}e^e(\cos(e)+\sin(e)) - \frac{1}{2}e^\pi$

$\mu = \frac{1}{\pi - e}\int_e^\pi (\cos(x)\cdot e^x)dx$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi - e}\cdot I_3 \\ &= \frac{1}{\pi - e}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^e(\cos(e)+\sin(e)) - \frac{1}{2}e^\pi\right) \end{aligned}$$

Exercice 3 :

1. Pour tout x de $[0;1]$: $0 \le 1-x \le 1$, donc $0 \le (1-x)^n \le 1$.

   Or, pour tout x de $[0;1]$: $1 \le e^x \le e$

   Donc, pour tout x de $[0;1]$: $0 \le e^x(1-x)^n \le e$

2. **On a** : $0 \le (e^x)\cdot(1-x)^n \le e$, donc $0 \le \frac{(e^x)\cdot(1-x)^n}{n!} \le \frac{e}{n!}$

   donc $\int_0^1 0dx \le \int_0^1 \frac{(e^x)\cdot(1-x)^n}{n!}dx \le \int_0^1 \frac{e}{n!}dx$

   donc $0 \le I_n \le \frac{e}{n!}\cdot\int_0^1 dx$

   donc $0 \le I_n \le \frac{e}{n!}$

   Or, $\lim_{n\to+\infty}\frac{e}{n!} = 0$, donc **par théorème des gendarmes** : $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

D'où (I_n) converge vers 0.

3. $I_n = \int_0^1 \frac{(e^x)\cdot(1-x)^n}{n!}dx = \frac{1}{n!}\cdot\int_0^1 (e^x)\cdot(1-x)^n dx$

(I.P.P) :

On **pose** : $u'(x) = (1-x)^n) \Rightarrow u(x) = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$ et $v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{n!}\cdot\left(\left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\cdot e^x dx\right)\\
&= \frac{1}{n!}\cdot\left(\left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\cdot e^x\right]_0^1\right) + \frac{1}{n!}\cdot\int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\cdot e^x dx\\
&= \frac{1}{n!}\cdot\left(\left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\cdot e^x\right]_0^1\right) + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^x dx\\
&= \frac{1}{n!}\cdot\left(\left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\cdot e^x\right]_0^1\right) + I_{n+1}\\
&= \frac{1}{n!}\cdot\left(-\frac{(1-1)^{n+1}}{n+1}\cdot e^1 + \frac{(1-0)^{n+1}}{n+1}\cdot e^0\right) + I_{n+1}\\
&= \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n+1} + I_{n+1}\\
&= \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}
\end{aligned}$$

D'où : $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$

4.

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^1 \frac{e^x\cdot(1-x)^0}{0!}dx\\
&= \int_0^1 e^x dx\\
&= [e^x]_0^1\\
&= e-1
\end{aligned}$$

D'où : $I_0 = e-1$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \frac{e^x\cdot(1-x)^1}{1!}dx\\
&= \int_0^1 e^x\cdot(1-x)dx
\end{aligned}$$

Effectuons une Intégration Par Parties :

On **pose** $u'(x) = e^x \Rightarrow u(x) = e^x$ et $v(x) = 1-x \Rightarrow v'(x) = -1$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= [(e^x)\cdot(1-x)]_0^1 - \int_0^1 -(e^x)dx \\
&= [(e^x)\cdot(1-x)]_0^1 + \int_0^1 (e^x)dx \\
&= [(e^x)\cdot(1-x)]_0^1 + [e^x]_0^1 \\
&= (e^1)\cdot(1-1) - (e^0)\cdot(1-0) + e^1 - 1 \\
&= e - 2
\end{aligned}
$$

D'où : $I_1 = e - 2$

5. Nous allons procéder à un **raisonnement par récurrence** sur n de $\mathbb{N}^*$.
   Soit $P(n)$ la **propriété** : $I_n = I_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$

   Initialisation : pour $n = 1$:

   $I_1 = e - 2$ et $I_0 - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k!} = I_0 - 1 = e - 1 - 1 = e - 2$, d'où $P(1)$ **vraie.**

   Hérédité : A n dans $\mathbb{N}^*$ fixé, supposons $P(n)$ vraie ; **démontrons alors** $P(n+1)$:

   Par hypothèse de récurrence : $I_n = I_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$

   Or, $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1} \Rightarrow I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$

   Donc :

$$
\begin{aligned}
I_{n+1} &= I_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+1)!} \\
&\Rightarrow I_{n+1} = I_0 - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} \right) \\
&\Rightarrow I_{n+1} = I_0 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}
\end{aligned}
$$

   d'où **l'hérédité**.

   Conclusion : $I_n = I_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$, pour n dans $\mathbb{N}^*$

6. On a : $I_n = I_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = I_0 - I_n \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = (e-1) - I_n$

   Or, $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$, **donc** $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \right) = (e-1)$

   Donc $e = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \right) + 1$

Alors, tu as eu combien ? Si tu es toujours aussi chaud, je te conseille d'aller voir les autres cours disponibles dans la rubrique *"Mathématiques"* afin de cartonner pour le bac !