# Limites de suites

Cours de mathématiques

**Attention !**
Avant de commencer, je vous conseille fortement de faire sérieusement les exemples proposés qui sont formateurs et vous préparent pour le bac (certains dépassent les exigences du bac) ! Si vous savez faire les exemples, vous êtes plus que prêt pour le bac ! Regarder la solution APRÈS avoir cherché !

**Définition**
**Approche 1 :**
La limite d'une suite $(u_n)$, notée "$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$" traduit le comportement de la suite lorsque "n devient très grand".

**Propriété**
**Limites usuelles :**

$$\lim_{n\to+\infty}(n) = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n}) = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty}(e^n) = +\infty$$

Pour $k > 0$ :

$$\lim_{n\to+\infty}(n^k) = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^k}\right) = 0$$

**Exemple**
Soit $(u_n)$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n = 3n + \sqrt{n} - 2$.
Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**Solution :**

On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n) = +\infty$ (par produit)
De même : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n}) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n}-2) = +\infty$ (par somme)
Ainsi, par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n + \sqrt{n} - 2) = +\infty$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$.

**Propriété**
**Opérations sur les limites**

| **Opération** | $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = l$ **fini** | $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$ | $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = -\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$ | $l + \lim_{n\to+\infty}(v_n)$ | $+\infty$ si $\lim_{n\to+\infty}(v_n) \neq -\infty$ | $-\infty$ si $\lim_{n\to+\infty}(v_n) \neq +\infty$ |
| $\lim_{n\to+\infty}(u_n \cdot v_n)$ | $l \cdot \lim_{n\to+\infty}(v_n)$<br>($0 \cdot \pm\infty$ : indéterminée) | $+\infty$ si $\lim_{n\to+\infty}(v_n) > 0$<br>$-\infty$ si $\lim_{n\to+\infty}(v_n) < 0$ | $-\infty$ si $\lim_{n\to+\infty}(v_n) > 0$<br>$+\infty$ si $\lim_{n\to+\infty}(v_n) < 0$ |
| $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ | $\frac{l}{\lim_{n\to+\infty}(v_n)}$<br>($\frac{l}{0}$ = indéterminée) | $+\infty$ si $\lim_{n\to+\infty}(v_n) > 0$<br>$-\infty$ si $\lim_{n\to+\infty}(v_n) < 0$<br>($\frac{\pm\infty}{+\infty}$ : indéterminée) | $-\infty$ si $\lim_{n\to+\infty}(v_n) > 0$<br>$+\infty$ si $\lim_{n\to+\infty}(v_n) < 0$<br>($\frac{-\infty}{-\infty}$ : indéterminée) |

Formes indéterminées : $0 \cdot \pm\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $+\infty - \infty$

**Remarque**
Ce tableau n'est pas à apprendre par cœur, mais à comprendre !

**Exemple**
Soit $(u_n)$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n = -n \cdot \left(\sqrt{n} + \frac{2}{n^4}\right)$
Déterminer la limite de la suite $(u_n)$

**Solution :**

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} (n) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n) = -\infty$

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{n}) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{n^4}\right) = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{n^4}\right) = 0$.

Donc, par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n} + \dfrac{2}{n^4}\right) = +\infty$

Enfin, par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-n \cdot \left(\sqrt{n} + \dfrac{2}{n^4}\right)\right) = -\infty$

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = -\infty$

**Propriété**
**Lever une indétermination**

Pour déterminer la limite d'une forme indéterminée, une méthode essentielle est la mise en facteur du terme prépondérant dans une somme !

**Exemple**
Déterminer la limite des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par : pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n = n^3 - 4n^2 + 5n$ et $v_n = \frac{n+2}{n^2-5}$

**Solution :**

$$\lim_{n \to +\infty} (n^3 - 4n^2 + 5n) = \lim_{n \to +\infty} \left(n^3 \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}\right)\right)$$

On a :

$$\lim_{n \to +\infty} (n^3) = +\infty$$
$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0, \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{4}{n}\right) = 0$$
$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = 0, \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{n^2}\right) = 0$$

Ainsi, par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = 1$

Par produit, on a donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n^3 \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}\right)\right) = +\infty$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$

Pour la suite $(v_n)$ :

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \frac{n+2}{n^2-5} &= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1 - \frac{5}{n^2}\right)} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{5}{n^2}}
\end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = 0, \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{n^2}\right) = 0$$

Par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = 0$

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{5}{n^2}\right) = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{5}{n^2}\right) = 1$

Par quotient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{5}{n^2}} = 0$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = 0$

**Propriété**
**Limites des suites géométriques**

Soit $q$ un réel.

— Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) = +\infty$

— Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) = 1$

— Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) = 0$

— Si $q \leq -1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n)$ n'existe pas.

**Théorème**
***Suites monotones et convergence***

Toute suite **croissante** et **majorée** converge
Toute suite **décroissante** et **minorée** converge

**Exemple**
Soit la suite $(u_n)$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

On remarque facilement que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $u_n > 1$ (si vous n'êtes pas à l'aise, faites une récurrence !)
De plus : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n+1)} \\ &= \frac{n-n-1}{n(n+1)} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $n > 0$ et $n+1 > 0$, donc $n(n+1) > 0$, donc $\frac{-1}{n(n+1)} < 0$.

Ainsi, $u_{n+1} - u_n < 0$, donc $(u_n)$ est décroissante.

Conclusion : La suite $(u_n)$ est décroissante et minorée (par 1), donc elle converge.

**Remarque**
En effet, la suite $(u_n)$ converge puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

**Théorème**
**Théorème des gendarmes**

Soient trois suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ telles que :

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = \lim_{n \to +\infty} (w_n) = l$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Alors, $\lim_{n \to +\infty} (v_n) = l$

**Exemple**

Soit $(u_n)$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n = \frac{e \cdot \sin(n^2 - 4n)}{n+2}$

Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**Solution :** La suite (sin) ne possède pas de limite. Ainsi, le seul moyen de s'en débarrasser est de l'encadrer !

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $-1 \leq \sin(x) \leq 1$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$-1 \leq \sin(n^2 - 4n) \leq 1$$
$$-e \leq e \cdot \sin(n^2 - 4n) \leq e$$
$$\frac{-e}{n+2} \leq \frac{e \cdot \sin(n^2 - 4n)}{n+2} \leq \frac{e}{n+2}$$

Or, $\lim_{n \to +\infty} (n) = +\infty$, donc $\lim_{n \to +\infty} (n+2) = +\infty$, donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n+2}\right) = 0$

Donc, $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{-e}{n+2}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{e}{n+2}\right) = 0$

Ainsi, par théorème des gendarmes : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{e \cdot \sin(n^2 - 4n)}{n+2}\right) = 0$

Conclusion : $\lim_{n \to +\infty} (u_n) = 0$

**Théorème**

**Théorème de comparaison**

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites telles que pour un rang $k$, $\forall n \geq k$, $u_n \leq v_n$. Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (v_n) = +\infty$$
$$\lim_{n \to +\infty} (v_n) = -\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (u_n) = -\infty$$

**Exemple**
Soit $(u_n)$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n = 2 \cdot (-1)^n + 4n^2 + 3$
Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**Solution :** On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $-1 \leq (-1)^n$, donc $-2 \leq 2 \cdot (-1)^n$, donc $-2 + 4n^2 + 3 \leq 2 \cdot (-1)^n + 4n^2 + 3$, donc $4n^2 + 1 \leq u_n$

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (4n^2 + 1) = +\infty$.

Par théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$

**Attention !**
Vous êtes chauds si vous êtes arrivés jusque là ! Regardons alors de plus près avec ces exercices si vous allez pulvériser vos limites !

## Exercices types sur les limites !

*(Ne pas regarder la correction sans avoir cherché)*

**Exercice**
**Exercice 1 (5 points).** Calculer les limites de chacune des suites (0,5 points pour chaque suite) (pas évidentes !)

$a_n = \sin(n) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$ $\quad b_n = \frac{\cos(3n)}{\sqrt{n}}$ $\quad c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{5}{3}\right)^n$

$d_n = \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{3^{2n-1}}$ $\quad u_n = \frac{3n^4-2n^3+7n-3}{n^3-5n+2}$ $\quad v_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) \cdot e^{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{2n}$

$w_n = \sqrt{\frac{5n-4}{2n+1}}$ $\quad x_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cdot n^2$ $\quad y_n = \sqrt{n + \cos(2n)} - \sqrt{n}$

$z_n = e^{\sqrt{\frac{3n+4}{4n+1}}}$

**Exercice**
**Exercice 2 (2 points)** Soit $(u_n)$ la suite définie par : pour tout $n \geq 2$ : $u_n = 3 + \frac{\sqrt{n}}{n+(-1)^n}$

1) Démontrer que : pour tout $n \geq 2$ : $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq u_n - 3 \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ (indice : encadrer $(-1)^n$)

2) En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice**
**Exercice 3 : (5 points)** On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+1}$

1) Montrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $1 \leq u_n \leq 2$

2) On pose la fonction $f$ définie sur $[1;2]$ par : pour tout $x \in [1;2]$ : $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.
Montrer que $f$ est strictement croissante sur $[1;2]$ puis montrer par récurrence que la suite $(u_n)$ est croissante.

3) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

**Exercice**
**Exercice 4 : (8 points)** (exercice du diable ;))

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$

On pose la fonction $f$ définie sur $[0;1]$ par : pour tout $x \in [0;1]$ : $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1) Démontrer que la fonction $f$ est croissante sur $[0;1]$ (inutile de faire le tableau de variation)

2) Démontrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $0 \leq u_n \leq 1$

3) Démontrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} - u_n = \frac{(2 \cdot u_n+1)(1-u_n)}{2 \cdot \left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n\right)}$

4) En déduire que la suite $(u_n)$ est croissante.

5) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

6) En notant $l$ la limite de $(u_n)$, déterminer $l$.

# Correction des exercices sur les limites de suites

## Exercice 1 : Calculs de limites

[a) Étude de la suite $(a_n)$ définie par $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \sin(n)$] On a $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :

$$-\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq a_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \tag{1}$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$ (car $-1 < -\frac{3}{4} < \frac{3}{4} < 1$)
Donc, par théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

[b) Étude de la suite $(b_n)$ définie par $b_n = \frac{\cos(3n)}{\sqrt{n}}$] On a $-1 \leq \cos(3n) \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc :

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq b_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

Or, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 = \lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
Donc, par théorème des gendarmes : $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$
[c) Étude de la suite $(c_n)$ définie par $c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{5}{3}\right)^n$]

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{5}{3}\right)^n\right) \tag{3}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\left(\frac{5}{3}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{5}{3}\right)^n}\right)\right) \tag{4}$$

Simplifions l'expression $\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{5}{3}\right)^n}$ :

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{5}{3}\right)^n} = \left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{3}}\right)^n \tag{5}$$

$$= \left(-\frac{3}{10}\right)^n \tag{6}$$

On a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\left(\frac{5}{3}\right)^n \cdot \left(1 + \left(-\frac{3}{10}\right)^n\right)\right) \tag{7}$$

Or, $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$ (car $\frac{5}{3} > 1$) et $\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{3}{10}\right)^n = 0$ (car $0 < -\frac{3}{10} < 1$).
Donc, $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \left(-\frac{3}{10}\right)^n\right) = 1$
Par produit : $\lim_{n \to +\infty} \left(\left(\frac{5}{3}\right)^n \cdot \left(1 + \left(-\frac{3}{10}\right)^n\right)\right) = +\infty$
D'où : $\lim_{n \to +\infty} c_n = +\infty$

[d) Étude de la suite $(d_n)$ définie par $d_n = \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{3^{2n-1}}$]

$$\lim_{n\to+\infty} d_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{3^{2n-1}}\right) \tag{8}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{3^{2n-1}} + \frac{3^{n+1}}{3^{2n-1}}\right) \tag{9}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{3^{2n}\cdot 3^{-1}} + \frac{3^{n+1}}{3^{2n-1}}\right) \tag{10}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(3\cdot\frac{2^{n+1}}{3^{2n}} + \frac{3^{n+1}}{3^{2n-1}}\right) \tag{11}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(3\cdot\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}\cdot 3^{n-1}} + \frac{3^{n+1}}{3^{2n-1}}\right) \tag{12}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{3^{n-1}} + \frac{3^{n+1}}{3^{2n-1}}\right) \tag{13}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{3^{n-1}} + \frac{3^{n+1-(2n-1)}}{1}\right) \tag{14}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{3^{n-1}} + 3^{n+1-2n+1}\right) \tag{15}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{3^{n-1}} + 3^{-n+2}\right) \tag{16}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{3^{n-1}} + 3^{2}\cdot 3^{-n}\right) \tag{17}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\cdot 3^{-(n-1)} + 9\cdot 3^{-n}\right) \tag{18}$$

Simplifions l'expression $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot 3^{-(n-1)}$ :

$$\begin{aligned}
3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot 3^{-(n-1)} &= 3 \cdot \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot 3^{-(n-1)} && (19)\\
&= 3 \cdot \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} && (20)\\
&= 3 \cdot \frac{2^{n+1}}{3^{n+1} \cdot 3^{n-1}} && (21)\\
&= 3 \cdot \frac{2^{n+1}}{3^{2n}} && (22)\\
&= 3 \cdot 2^{n+1} \cdot 3^{-2n} && (23)\\
&= 3 \cdot 2 \cdot 2^{n} \cdot 3^{-2n} && (24)\\
&= 6 \cdot 2^{n} \cdot 3^{-2n} && (25)\\
&= 6 \cdot \left(\frac{2}{3^2}\right)^{n} && (26)\\
&= 6 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{n} && (27)
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} d_n &= \lim_{n\to+\infty} \left(6 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{n} + 9 \cdot 3^{-n}\right) && (28)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(6 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{n} + 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right) && (29)
\end{aligned}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^{n} = 0$ (car $0 < \frac{2}{9} < 1$) et $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n} = 0$ (car $0 < \frac{1}{3} < 1$).

Donc, par somme : $\lim_{n\to+\infty} \left(6 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{n} + 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right) = 0$

D'où : $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$

[e) Étude de la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \frac{3n^4-2n^3+7n-3}{n^3-5n+2}$]

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^4 - 2n^3 + 7n - 3}{n^3 - 5n + 2} && (30)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4\left(3 - \frac{2}{n} + \frac{7}{n^3} - \frac{3}{n^4}\right)}{n^3\left(1 - \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^3}\right)} && (31)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n \cdot n^3\left(3 - \frac{2}{n} + \frac{7}{n^3} - \frac{3}{n^4}\right)}{n^3\left(1 - \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^3}\right)} && (32)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n \cdot \left(3 - \frac{2}{n} + \frac{7}{n^3} - \frac{3}{n^4}\right)}{\left(1 - \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^3}\right)} && (33)
\end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{n}\right)=0 \tag{34}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{n^3}\right)=0 \tag{35}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{3}{n^4}\right)=0 \tag{36}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{5}{n^2}\right)=0 \tag{37}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n^3}\right)=0 \tag{38}$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(3-\frac{2}{n}+\frac{7}{n^3}-\frac{3}{n^4}\right)=3 \tag{39}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)=1 \tag{40}$$

Par quotient :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(3-\frac{2}{n}+\frac{7}{n^3}-\frac{3}{n^4}\right)}{\left(1-\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}=3 \tag{41}$$

Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, donc par produit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n\cdot\left(3-\frac{2}{n}+\frac{7}{n^3}-\frac{3}{n^4}\right)}{\left(1-\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}=+\infty \tag{42}$$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

[f) Étude de la suite $(v_n)$ définie par $v_n=\cos\left(\frac{1}{n}\right)e^{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{2n}$] Tout d'abord : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$, donc par composition (voir chapitre dérivation et convexité) :

$$\lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right)=\cos(0)=1 \tag{43}$$

De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\sqrt{n}}=+\infty$

Enfin :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}=0 \quad (\text{car } n=(\sqrt{n})^2) \tag{44}$$

Ainsi, par produit et par somme :

$$\lim_{n\to+\infty} \left( \cos\left(\frac{1}{n}\right) e^{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{2n} \right) = +\infty \tag{45}$$

D'où : $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

[g) Étude de la suite $(w_n)$ définie par $w_n = \sqrt{\frac{5n-4}{2n+1}}$]

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{5n-4}{2n+1}} \tag{46}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n(5-\frac{4}{n})}{n(2+\frac{1}{n})}} \tag{47}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{5-\frac{4}{n}}{2+\frac{1}{n}}} \tag{48}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{4}{n}\right) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Donc, par sommes : $\lim_{n\to+\infty} \left(5 - \frac{4}{n}\right) = 5$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$

Par quotient : $\lim_{n\to+\infty} \frac{5-\frac{4}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{5}{2}$

Par composition : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{5n-4}{2n+1}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

D'où : $\lim_{n\to+\infty} w_n = \sqrt{\frac{5}{2}}$

[h) Étude de la suite $(x_n)$ définie par $x_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cdot n^2$]

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cdot n^2 \tag{49}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \tag{50}$$

On effectue le changement de variable $N = \frac{1}{n}$ :

On a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, et $\lim_{N\to0} \frac{\sin(N)}{N} = \lim_{N\to0} \frac{\sin(N)-\sin(0)}{N-0} = 1$ (voir cours dérivée)

Puisque $N = \frac{1}{n}$, alors $n = \frac{1}{N}$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{N\to0} \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin(N)}{N} \tag{51}$$

Par produit : $\lim_{N\to0} \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin(N)}{N} = +\infty$

D'où : $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cdot n^2 = +\infty$
Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

[i) Étude de la suite $(z_n)$ définie par $z_n = e^{\sqrt{\frac{3n+4}{4n+1}}}$]

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\sqrt{\frac{3n+4}{4n+1}}} \tag{52}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\sqrt{\frac{3+\frac{4}{n}}{4+\frac{1}{n}}}} \tag{53}$$

On a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
Par somme : $\lim_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{4}{n}\right) = 3$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(4 + \frac{1}{n}\right) = 4$
Par quotient : $\lim_{n\to+\infty} \frac{3+\frac{4}{n}}{4+\frac{1}{n}} = \frac{3}{4}$
Par composition : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{3+\frac{4}{n}}{4+\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$
Encore par composition : $\lim_{n\to+\infty} e^{\sqrt{\frac{3n+4}{4n+1}}} = e^{\sqrt{\frac{3}{4}}}$
D'où : $\lim_{n\to+\infty} z_n = e^{\sqrt{\frac{3}{4}}}$

## Exercice 2

On a $(u_n)$ la suite définie par : $\forall n \geq 2 : u_n = 3 + \frac{\sqrt{n}}{n+(-1)^n}$

[1) Encadrement de la suite] On a : $\forall n \geq 2 : -1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $n - 1 \leq n + (-1)^n \leq n + 1$

Donc $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+(-1)^n} \leq \frac{1}{n-1}$ (par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$)

Donc $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+(-1)^n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1}$
Donc $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq u_n - 3 \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1}$
Conclusion : $\forall n \geq 2 : \frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq u_n - 3 \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1}$
[2) Calcul de la limite] On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}})} \tag{54}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}} \tag{55}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}) = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 0$

De même : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n-1} = 0$

Ainsi, par théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - 3) = 0$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

**Exercice**

**Exercice 3 :**

On a la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+1}$

1. Procédons à un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P(n)$ la propriété : $1 \leq u_n \leq 2$.
   **Initialisation** : pour $n = 1$ : $u_1 = \frac{2u_0+1}{u_0+1} \Leftrightarrow \frac{1+1}{\frac{1}{2}+1} \Leftrightarrow u_1 = \frac{2}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow u_1 = \frac{4}{3}$
   On a bien $1 \leq u_1 \leq 2$, d'où $P(1)$ vraie.
   **Hérédité** : À $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, supposons $P(n)$ vraie ; démontrons alors $P(n+1)$ :
   On a, par hypothèse de récurrence : $1 \leq u_n \leq 2$, donc $2 \leq 2u_n \leq 4$, donc $3 \leq 2u_n + 1 \leq 5$
   De même : $2 \leq u_n + 1 \leq 3$, donc par passage à l'inverse : $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n+1} \leq \frac{1}{2}$
   Par produit : $1 \leq \frac{2u_n+1}{u_n+1} \leq \frac{5}{2} \leq 2$, d'où l'hérédité.
   **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $1 \leq u_n \leq 2$.
2. On a pour tout $x \in [1;2]$ : $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$
   $f$ est dérivable sur $[1;2]$ en tant que quotient de deux fonctions dérivables sur $[1;2]$. On pose :
   $u(x) = 2x+1 \Rightarrow u'(x) = 2$ $v(x) = x+1 \Rightarrow v'(x) = 1$
   Formule : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
   Pour tout $x \in [1;2]$ : $f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$
   On remarque que : pour tout $x \in [1;2]$ : $f'(x) > 0$, donc $f$ est strictement croissante sur $[1;2]$.
   Procédons à nouveau par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ cette fois-ci. Soit $P(n)$ la propriété : $u_{n+1} - u_n > 0$
   **Initialisation** : pour $n = 0$ : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{4}{3}$. On a bien $u_1 - u_0 > 0$, d'où $P(0)$ vraie.
   **Hérédité** : À $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons $P(n)$ vraie ; démontrons alors $P(n+1)$ :

On a, par hypothèse de récurrence : $u_{n+1} - u_n > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$, donc $f(u_{n+1}) > f(u_n)$ (car $f$ est strictement croissante sur $[0;2]$) donc $u_{n+2} > u_{n+1}$ (car $f(u_n) = u_{n+1}$) donc $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$, d'où l'hérédité.

**Conclusion** : $(u_n)$ est croissante.

3. La suite $(u_n)$ est majorée (par 2) et est croissante, donc elle converge.

**Exercice**
**Exercice 4 :**

On a $(u_n)$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$

On pose la fonction $f$ définie sur $[0;1]$ par : pour tout $x \in [0;1]$ : $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1. $f$ est dérivable sur $[0;1]$ en tant que 'composée' de deux fonctions dérivables sur $[0;1]$
   On pose : $u(x) = \frac{1+x}{2} \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{2}$
   Formule : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ (voir chapitre dérivation et convexité)
   Pour tout $x \in [0;1]$ : $f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{2}}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1+x}{2}}} > 0$
   Puisque $f'(x) > 0$, alors $f$ est croissante (strictement) sur $[0;1]$.
2. Nous allons procéder à un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Soit $P(n)$ la propriété : $0 \leq u_n \leq 1$.
   **Initialisation** : pour $n = 0$ : on a $u_0 = 1$ et $0 \leq u_0 \leq 1$, d'où $P(0)$ vraie.
   **Hérédité** : À $n$ un entier naturel fixé, supposons $P(n)$ vraie ; démontrons alors $P(n+1)$ :
   Par hypothèse de récurrence : $0 \leq u_n \leq 1$, donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$ (car $f$ est croissante sur $[0;1]$) donc, $f(0) \leq u_{n+1} \leq f(1)$ (car $u_{n+1} = f(u_n)$)
   Or, $f(0) = \sqrt{\frac{1}{2}}$ et $f(1) = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$
   On a donc $\sqrt{\frac{1}{2}} \leq u_{n+1} \leq 1$, donc $0 \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \leq u_{n+1} \leq 1$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1$, d'où l'hérédité.
   **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $0 \leq u_n \leq 1$.
3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$u_{n+1}-u_n=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}-u_n=\frac{(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}-u_n)(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n)}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n}$ (multiplier par la quantité conjuguée) $=\frac{(\frac{1+u_n}{2}-u_n^2)}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n}=\frac{(\frac{1+u_n}{2}-\frac{2u_n^2}{2})}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n}=\frac{(1+u_n-2u_n^2)/2}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n}$ $=\frac{1+u_n-2u_n^2}{2\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+2u_n}=\frac{(2u_n+1)(1-u_n)}{2(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n)}$ (en factorisant (discriminant, deux racines, simplifier les moins...))

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1}-u_n=\frac{(2u_n+1)(1-u_n)}{2(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n)}$

4. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $2(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n) \geq 0$ (racine carrée positive et $u_n \geq 0$ d'après question 2)
   De plus, $2u_n+1 \geq 0$. Or, $0 \leq u_n \leq 1$, donc $-1 \leq -u_n \leq 0$, donc $0 \leq 1-u_n$
   Ainsi : pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\frac{(2u_n+1)(1-u_n)}{2(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n)} \geq 0$, donc $u_{n+1}-u_n \geq 0$
   Donc la suite $(u_n)$ est croissante.
5. La suite $(u_n)$ est croissante et majorée (par 1), donc elle converge.
6. Notons $l$ sa limite. Puisque $(u_n)$ converge, alors :
   $\lim_{n\to+\infty}(u_n)=\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1})=l$
   Or, $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1})=\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}})=l$
   Ainsi, nous devons résoudre l'équation : $\sqrt{\frac{1+l}{2}}=l$ :
   $\sqrt{\frac{1+l}{2}}=l \Leftrightarrow \frac{1+l}{2}=l^2 \Leftrightarrow 1+l=2l^2 \Leftrightarrow -2l^2+l+1=0$ $\Leftrightarrow (2l+1)(1-l)=0$ (en factorisant (discriminant, deux racines, simplifier les moins...)) $\Leftrightarrow 2l+1=0$ OU $1-l=0$ (produit nul) $\Leftrightarrow l=-\frac{1}{2}$ OU $l=1$
   Or $-\frac{1}{2} \notin [0;1]$, donc $l=1$
   **Conclusion** : $(u_n)$ converge vers 1.

Les exercices proposés ci-dessus sont nettement plus compliqués que ce que vous allez retrouver au bac ! Mais il n'empêche que si vous maitrisez très bien le cours, vous en êtes capable ! Si vous n'avez pas réussi, PAS DE PANIQUE ! Allez faire des exos plus simples, plus rattachés au cours pour être plus à l'aise !

Alors, tu as eu combien ? Si tu es toujours aussi chaud, je te conseille d'aller voir les autres cours disponibles dans la rubrique "Mathématiques" afin de cartonner pour le bac !