# Logarithme népérien

**Avant de commencer, je vous conseille fortement de faire sérieusement les exemples proposés qui sont formateurs et vous préparent pour le bac ! Si vous savez faire les exemples, vous êtes plus que prêt pour le bac ! Regarder la solution APRES avoir cherché !**

## 1 Rappels

La fonction exponentielle, notée $\exp(x)$ ou $e^x$, est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$, strictement positive et définie comme étant l'unique fonction $f$ qui vérifie : $f(0) = 1$ et $f' = f$

On a : pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$
\begin{aligned}
e^{a+b} &= e^a \times e^b \\
e^{-a} &= \frac{1}{e^a} \\
(e^a)^b &= e^{ab}
\end{aligned}
$$

La dérivée de $e^u$, avec $u$ une fonction dérivable de dérivée $u'$ : $(e^u)' = u' \times e^u$

## 2 Propriétés du logarithme népérien

**Définition 1.** *On appelle fonction* ***logarithme népérien****, notée* ln*, la fonction définie sur* $]0; +\infty[$ *qui à tout nombre* ***strictement positif*** $b$ *associe l'****unique*** *solution de l'équation* $e^a = b$ *d'inconnue* $a$*. On définit donc que* $a = \ln(b)$*.*

**Exemple 1.** ***Résoudre les équations suivantes : (1)*** $e^x = 7$ ***et (2)*** $e^x = 0$

***Solution :***

$$
\begin{aligned}
\textit{(1)} \quad e^x = 7 &\Leftrightarrow x = \ln(7) \\
&\Rightarrow S = \{\ln(7)\}
\end{aligned}
$$

$$\textit{(2)} \quad e^x = 0$$

*n'admet aucune solution réelle car une exponentielle est toujours positive.*

$$\Rightarrow S = \emptyset$$

**Propriété 1.** *Pour tout* $x > 0$ *:* $e^{\ln(x)} = x$
*Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:* $\ln(e^x) = x$

*On en déduit alors :*

$$\ln(1) = 0 \quad \ln(e) = 1 \quad \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$$

**Propriété 2** (Propriété graphique)**.** *Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielles et logarithmes sont* ***symétriques*** *par rapport à la droite d'équation* $y = x$*.*

**Remarque 1.** *Ceci découle que la fonction* ln *est la fonction* ***réciproque*** *de la fonction* exp.

**Propriété 3.** *La fonction* ln *est :*

— ***strictement croissante*** *sur* $]0; +\infty[$

— *concave sur* $]0; +\infty[$

**Remarque 2.** *Puisque* ln *est* ***strictement croissante*** *sur* $]0; +\infty[$*, alors :*

*Pour tous* $a, b \in ]0; +\infty[$ *:*

$$a < b \Rightarrow \ln(a) < \ln(b)$$
$$a > b \Rightarrow \ln(a) > \ln(b)$$
$$a = b \Rightarrow \ln(a) = \ln(b)$$

**Propriété 4.** *L'équation* $e^x = k$*, avec* $k > 0$*, admet une* ***unique solution*** *dans* $\mathbb{R}$*.*

**Remarque 3.** *Ceci découle du* ***théorème de la bijection****.*

**Propriété 5.** *La fonction* ln *est* ***dérivable*** *sur* $]0; +\infty[$*. On a :*

*Pour tout* $x \in ]0; +\infty[$ *:* $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

**Remarque 4.** *Puisque* $\ln'(x) = \frac{1}{x}$*, alors* $\ln'(x)$ *est dérivable sur* $]0; +\infty[$*, donc :* $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$*, et* $\ln''(x) < 0$*, d'où la fonction* ln *est* ***concave*** *sur* $]0; +\infty[$*.*

**Propriété 6** (Propriétés algébriques)**.** *Pour tout $a, b > 0$ :*

$$\begin{aligned}\ln(a \times b) &= \ln(a) + \ln(b)\\ \ln\left(\frac{1}{a}\right) &= -\ln(a)\\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln(a) - \ln(b)\\ \ln(\sqrt{a}) &= \frac{1}{2}\ln(a)\end{aligned}$$

*Pour $n \in \mathbb{N}$ :*

$$\ln(a^n) = n \times \ln(a)$$

**Exemple 2.** ***Résoudre les équations et inéquations suivantes dans un intervalle (ou une réunion d'intervalles) $I$ à déterminer :***

*(1).* $\ln(2x + x^2 - 3) = 2$

*(2).* $e^{1/x} = 7$

*(3).* $\ln(\sqrt{3x-2}) > 1$

*(4).* $\ln(x^2 + 2x + 2) > e^2$

*(5).* $\ln(e^x - 2) > 3$

***Solution :***

*(1). Il faut que : $x^2 + 2x - 3 > 0$ (car sinon le $\ln$ n'est **pas défini** !)*

*On a le **discriminant** $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$*

*Puisque $\Delta > 0$, alors le trinôme admet **deux solutions distinctes**. Or, le coefficient $a = 1 > 0$, donc **le trinôme est du signe de** $a$ **à l'extérieur des racines**.*

*On a : $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$, donc les racines sont $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$.*

$x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; -3[ \cup ]1; +\infty[$. *Donc* $I = ]-\infty; -3[ \cup ]1; +\infty[$.

*On résout l'équation dans $I$ :*

$$\begin{aligned}&\ln(2x + x^2 - 3) = 2\\ &\Leftrightarrow 2x + x^2 - 3 = e^2\\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - (3 + e^2) = 0\end{aligned}$$

*Il suffit de résoudre l'équation du **second degré** ! (en faisant $\Delta$, etc...), on trouve :*

$$\begin{aligned}\Delta &= 4 + 4(e^2 + 3)\\ &= 4(4 + e^2) > 0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-2+\sqrt{\Delta}}{2} \\
&= -1+\sqrt{e^2+4} \\
&= \sqrt{e^2+4}-1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{-2-\sqrt{\Delta}}{2} \\
&= -1-\sqrt{e^2+4} \\
&= -(1+\sqrt{e^2+4})
\end{aligned}
$$

*De plus* $x_1$ *et* $x_2 \in ]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$.

$$\boxed{S = \{-(1+\sqrt{e^2+4});\sqrt{e^2+4}-1\}}$$

*(2). Il faut juste que* $x \neq 0$*, donc* $I = \mathbb{R}^*$

$$
\begin{aligned}
& e^{1/x} = 7 \\
\Leftrightarrow\ & \ln(e^{1/x}) = \ln(7) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{x} = \ln(7) \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{1}{\ln(7)}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{1}{\ln(7)}\right\}}$$

*(3). Il faut que* $\sqrt{3x-2} > 0$*, donc* $3x-2>0$*, donc* $x > \frac{2}{3}$*. Ainsi :* $I = ]\frac{2}{3};+\infty[$

$$
\begin{aligned}
& \ln(\sqrt{3x-2}) > 1 \\
\Leftrightarrow\ & e^{\ln(\sqrt{3x-2})} > e^1 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{3x-2} > e \\
\Leftrightarrow\ & 3x-2 > e^2 \\
\Leftrightarrow\ & x > \frac{e^2+2}{3}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{S = ]\tfrac{e^2+2}{3};+\infty[}$$

*(4). On a :* $x^2+2x+2 = (x^2+2x+1)+1 = (x+1)^2+1 > 0$*. Ainsi :* $I = \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
& \ln(x^2+2x+2) > e^2 \\
\Leftrightarrow\ & e^{\ln(x^2+2x+2)} > e^{e^2} \\
\Leftrightarrow\ & x^2+2x+2 > e^{e^2} \\
\Leftrightarrow\ & x^2+2x+(2-e^{e^2}) > 0
\end{aligned}
$$

*Puisque le coefficient $a = 1 > 0$, alors le* ***trinôme*** *sera du signe de a à* ***l'extérieur des racines****.*

*On calcule le* ***discriminant*** *:* $\Delta = 4 - 4 \times 1 \times (2 - e^{e^2}) = 4(1 - (2 - e^{e^2})) = 4(e^{e^2} - 1) > 0$

*Comme $a = 1 > 0$ est positif, et que $\Delta > 0$, alors on calcule les* ***racines distinctes*** *:*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-2 + \sqrt{\Delta}}{2} \\ &= \sqrt{(e^{e^2} - 1)} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-2 - \sqrt{\Delta}}{2} \\ &= -(1 + \sqrt{(e^{e^2} - 1)}) \end{aligned}$$

$S = ]-\infty; -(1 + \sqrt{(e^{e^2} - 1)})[\cup]\sqrt{(e^{e^2} - 1)} - 1; +\infty[$

*(5). Il faut que $e^x - 2 > 0$, donc $e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln(2)$. Ainsi : $I = ]\ln(2); +\infty[$*

$$\begin{aligned} &\ln(e^x - 2) > 3 \\ &\Leftrightarrow e^x - 2 > e^3 \\ &\Leftrightarrow e^x > 2 + e^3 \\ &\Leftrightarrow x > \ln(2 + e^3) \end{aligned}$$

$S = ]\ln(2 + e^3); +\infty[$

**Propriété 7.** *On a :*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \ln(x) &= +\infty \\ \lim_{x \to 0^+} \ln(x) &= -\infty \\ \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) &= 0 \quad \textit{(croissance comparée)} \\ \forall n \in \mathbb{N}^* : \lim_{x \to 0^+} x^n \ln(x) &= 0 \quad \textit{(croissance comparée)} \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} &= 0 \quad \textit{(croissance comparée)} \\ \forall n \in \mathbb{N}^* : \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} &= 0 \quad \textit{(croissance comparée)} \\ \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} &= 1 \quad \textit{(taux d'accroissement de la fonction } \ln(1+x) \textit{ en 0)} \end{aligned}$$

**Exemple 3.** ***Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $f$ suivante :***

*(1). $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{2x-3}$*

***Solution : Levons l'indétermination :***

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-1)}{2x-3} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x(1-\frac{1}{x}))}{2x-3} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)+\ln(1-\frac{1}{x})}{2x-3} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{2x-3} + \frac{\ln(1-\frac{1}{x})}{2x-3} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\cdot\frac{x}{2x-3} + \ln(1-\frac{1}{x})\cdot\frac{1}{2x-3}
\end{aligned}$$

***Or :***

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ *(par croissance comparée)*
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{x} = 0$, *donc* $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-3}{x} = 2$, *donc* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x-3} = \frac{1}{2}$

*Ainsi, par* ***produit*** *:* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\cdot\frac{x}{2x-3} = 0$
*De plus :*

- $\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x}) = 1$, *donc* $\lim_{x\to+\infty} \ln(1-\frac{1}{x}) = 0$ *(par composition)*
- $\lim_{x\to+\infty} 2x-3 = +\infty$, *donc* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x-3} = 0$

*Ainsi, par* ***produit*** *:* $\lim_{x\to+\infty} \ln(1-\frac{1}{x})\cdot\frac{1}{2x-3} = 0$

*Par somme, il en résulte alors que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

**Propriété 8.** *Soit $u$ une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle $I$, et on note $u'$ sa dérivée. Alors :*
*Pour $x \in I$ : $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$*

**Remarque 5.** *Si $u$ est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle $I$, alors les fonctions $u$ et $\ln(u)$ ont le même sens de variation sur $I$.*

## III) Exercices

### Exercice 1 (7 points) :

Soit $g$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln(x^2)$.

**Partie A :**

1) Calculer $g'(x)$. En déduire les variations de $g$.
2) Montrer qu'il existe une unique solution $\alpha$ sur $]0;+\infty[$ telle que $g(\alpha) = 0$.
3) Démontrer que : $\alpha = e^{(1-\alpha)/2}$, puis vérifier que $\alpha = 1$.
4) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

**Partie B :**

Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = (1 - 1/x)\ln(x^2)$

5) Démontrer que pour tout $x$ de $]0;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{(x-1)}{x^2} + \frac{g(x)}{x^2}$
6) Déterminer le signe de $f'(x)$, puis en déduire les variations de $f$.
7) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

### Exercice 2 (3 points) :

Soit $f$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = (x+1)\ln(1+x) - x - \frac{x^2}{2}$

1) Calculer $f'(x)$.
2) Démontrer que pour tout $x$ de $[0;+\infty[$ : $\ln(1+x) \leq x$.
3) En déduire le signe de $f'(x)$, puis les variations de $f$.

### Exercice 3 (10 points) :

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n^2)$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

**Partie A :**

On pose la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \ln(1+x^2)$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.
2) Pour $x > 2$, déterminer le signe de la fonction $h(x) = x^3 - x^2 - 1$.
3) En déduire que, pour tout $x > 2$ : $f(x) > x - \ln(x^3)$
4) En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
5) Calculer $f'(x)$ puis en déduire que $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$

**Partie B :**

7) Démontrer par récurrence que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $0 \leq u_n \leq 1$.
8) Démontrer par récurrence que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$
9) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente, puis déterminer sa limite.
10) On pose $(v_n)$ la suite définie par pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $v_n = (2/3)^{n-1}$
    Déterminer le rang $n$ à partir duquel $v_n < 0.001$

## IV) Correction

### Exercice 1 :

On a $g$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln(x^2)$.

1) $g$ est **dérivable** sur $]0;+\infty[$ en tant que **somme** de deux **fonctions dérivables** sur $]0;+\infty[$.
   On a :

$$g(x) = x - 1 + \ln(x^2)$$
$$\Rightarrow g(x) = x - 1 + 2\ln(x)$$

Ainsi, pour tout $x$ de $]0;+\infty[$ :

$$g'(x) = 1 + \frac{2}{x}$$

Pour tout $x$ de $]0;+\infty[$ : $1 + \frac{2}{x} > 0$, donc $g'(x) > 0$.

| Ainsi, $g$ est **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$. |
|---|

2) On sait que :
   - $g$ est **continue** sur $]0;+\infty[$ puisqu'elle est **dérivable** sur $]0;+\infty[$.
   - $g$ est **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$.
   - 0 est **compris** entre $]\lim_{x\to 0} g(x); \lim_{x\to+\infty} g(x)[$ $\Leftrightarrow$ 0 est compris entre $]-\infty;+\infty[$ puisque : $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   Ainsi, d'après le **théorème de la bijection**, il existe une **unique** solution $\alpha$ telle que $g(\alpha) = 0$.

3) On a :

$$\begin{aligned} & g(\alpha) = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha - 1 + 2\ln(\alpha) = 0 \\ \Rightarrow\ & 2\ln(\alpha) = 1 - \alpha \\ \Rightarrow\ & \ln(\alpha) = \frac{1-\alpha}{2} \\ \Rightarrow\ & \alpha = e^{(1-\alpha)/2} \end{aligned}$$

| **Conclusion** : $\alpha = e^{(1-\alpha)/2}$ |
|---|

   En remplaçant $\alpha$ par 1, on a : $e^{(1-\alpha)/2} = e^{(1-1)/2} = e^0 = 1$.

4) La fonction $g$ étant **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$, on en déduit :

   - $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]0;1[$
   - $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1;+\infty[$.

5) On a $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = (1 - 1/x)\ln(x^2)$
   $f$ est **dérivable** en tant que **produit** de deux **fonctions dérivables** sur $]0;+\infty[$.

   On pose : $u(x) = (1 - 1/x) \Rightarrow u'(x) = 1/x^2$ et $v(x) = \ln(x^2) = 2\ln(x) \Rightarrow v'(x) = 2/x$

   ***Formule :*** $(uv)' = u'v + uv'$.

   Pour tout $x$ de $]0;+\infty[$ :

$$\begin{aligned} & f'(x) = \frac{2\ln(x)}{x^2} + (1 - \frac{1}{x})(\frac{2}{x}) \\ \Rightarrow\ & f'(x) = \frac{2\ln(x)}{x^2} + \frac{2x-2}{x^2} \\ \Rightarrow\ & f'(x) = \frac{2\ln(x)}{x^2} + \frac{x-1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2} \\ \Rightarrow\ & f'(x) = \frac{x - 1 + 2\ln(x)}{x^2} + \frac{x-1}{x^2} \\ \Rightarrow\ & f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} + \frac{x-1}{x^2} \end{aligned}$$

6) $f'(x)$ est du **signe** de $g(x) + (x-1)$.
On a : pour tout $x$ de $]0; +\infty[$ :

$$\begin{aligned} g(x) + (x-1) &= x - 1 + \ln(x^2) + (x-1) \\ &= 2x - 2 + 2\ln(x) \\ &= 2(x - 1 + \ln(x)) \end{aligned}$$

On **remarque que** $g(1) + (1-1) = 0$.

De plus, puisque $g$ est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$ et la fonction $x \mapsto x - 1$ est **aussi strictement croissante** sur $]0; +\infty[$, alors $x \mapsto g(x)+(x-1)$ est **aussi strictement croissante** sur $]0; +\infty[$.

Ainsi, on en déduit que :
— $g(x) + (x-1) < 0 \Leftrightarrow x \in ]0; 1[$.
— $g(x) + (x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
— $g(x) + (x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in ]1; +\infty[$.

Enfin, on **conclut** que :
— $f'(x) < 0$ pour $x \in ]0; 1[$
— $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
— $f'(x) > 0$ pour $x \in ]1; +\infty[$

Conclusion : $f$ est **strictement décroissante** sur $]0; 1[$, puis admet un **minimum** en 1 avant d'être **strictement croissante** sur $]1; +\infty[$.

7) On a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 2(1 - 1/x)\ln(x)$

Or, on sait que $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0} 2\ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 1/x) = -\infty$

Par **produit** : $\lim\limits_{x \to 0} 2(1 - 1/x)\ln(x) = +\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2(1 - 1/x)\ln(x)$
Or, on sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 1/x) = 1$

Par **produit** : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2(1 - 1/x)\ln(x) = +\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

## Exercice 2 :

1) On a pour $x$ dans $[0; +\infty[$ : $f(x) = (x+1)\ln(1+x) - x - \frac{x^2}{2}$

$f$ est **dérivable** sur $[0; +\infty[$ en tant que **somme** de deux **fonctions dérivables** sur $[0; +\infty[$.

| |
|---|
| On trouve donc : $f'(x) = \ln(1+x) - x$ |

2) Soit $g$ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(1+x)$

   $g$ est **deux fois dérivable** sur $[0; +\infty[$, et on a :

| |
|---|
| $g'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $g''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ |

   On remarque que pour tout $x$ de $[0; +\infty[$, $g''(x) < 0$, donc $g$ est **concave** sur $[0; +\infty[$.

   En notant $(C_g)$ la courbe de $g$ dans un repère orthonormé, on a $(C_g)$ **en dessous de chacune de ses tangentes**, y compris celle en 0.

   Notons alors $T_0$ la **tangente** en 0.

   ***Formule :*** $(T_0) : y = g'(0)(x-0) + g(0)$

   On a $g'(0) = 1$ et $g(0) = 0$

   Ainsi : $(T_0) : y = x$

   On a $(C_g)$ **en dessous** de $(T_0)$, donc $g(x) \leq x$, donc $\ln(1+x) \leq x$.

| |
|---|
| **Conclusion** : pour tout $x$ de $[0; +\infty[$ : $\ln(1+x) \leq x$ |

3) $f'(x)$ est du **signe** de $\ln(1+x) - x$. Or, d'après la question précédente : $\ln(1+x) - x \leq 0$ pour tout $x$ de $[0; +\infty[$.

| |
|---|
| Ainsi : $f'(x) \leq 0$, donc $f$ est **décroissante** sur $[0; +\infty[$. |

## Exercice 3 :

1) On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2+1) = +\infty$.

   Ainsi, par **composition** : $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -\ln(x^2+1) = -\infty$.

   Par **somme** : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - \ln(x^2+1)) = -\infty$.

| |
|---|
| D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ |

2) On sait que :
   — Pour $x > 2$ : $x^3 > 2^3$, donc $x^3 > 8$.
   — Pour $x > 2$ : $x^2 > 2^2$, donc $x^2 > 4$, donc $x^2 + 1 > 5$

   On en déduit donc : $x^3 - x^2 - 1 > 3$ (si pas convaincu, **faites un tableau de variation**).

| |
|---|
| D'où pour tout $x > 2$ : $h(x) > 3$ |

3) Puisque $x^3 - x^2 - 1 > 3$, alors $x^3 - x^2 - 1 > 0$, donc $x^3 > x^2 + 1$

Donc : $\ln(x^3) > \ln(x^2 + 1)$,
donc $-\ln(x^2 + 1) > -\ln(x^3)$,
donc $x - \ln(x^2 + 1) > x - \ln(x^3)$,

$$\boxed{\text{donc } f(x) > x - \ln(x^3).}$$

4) On remarque que :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x - \ln(x^3) &= \lim_{x\to+\infty} x - 3\ln(x) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x(1 - 3\frac{\ln(x)}{x})\end{aligned}$$

Or : $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (par croissance comparée)

Donc, $\lim_{x\to+\infty} 1 - 3\frac{\ln(x)}{x} = 1$

Par **produit** : $\lim_{x\to+\infty} x(1 - 3\frac{\ln(x)}{x}) = +\infty$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

5) $f$ est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ en tant que **somme** de deux **fonctions dérivables** sur $\mathbb{R}$.
On a donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{2x}{x^2+1} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{(x-1)^2}{x^2+1}\end{aligned}$$

On sait que pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ : $(x^2 + 1) > 0$ et $((x - 1)^2) \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$.

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est } \textbf{croissante} \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

6)

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Rightarrow x - \ln(x^2+1) = x \\ &\Rightarrow -\ln(x^2+1) = 0 \\ &\Rightarrow \ln(x^2+1) = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + 1 = 1 \\ &\Rightarrow x = 0\end{aligned}$$

(on dit que 0 est un **point fixe** de $f$)

7) Nous allons procéder à un **raisonnement par récurrence** sur $n$ dans $\mathbb{N}$. Soit $P(n)$ la propriété : $0 \leq u_n \leq 1$

***Initialisation*** : pour $n = 0$ : $u_0 = 1$ et $0 \leq u_0 \leq 1$, donc $P(0)$ **vraie**.

***Hérédité*** : A $n$ un entier naturel fixé, supposons $P(n)$ vraie ; **démontrons alors** $P(n+1)$ :

Par **hypothèse de récurrence** :
$0 \leq u_n \leq 1$,
donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$,
donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1 - \ln(2) \leq 1$,
donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

D'où **l'hérédité.**

| |
|---|
| **Conclusion** : pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $0 \leq u_n \leq 1$ |

8) Evident, même raisonnement..

9) $(u_n)$ est **décroissante** et **minorée** (par 0), donc elle **converge**. Soit $l$ sa **limite**.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ln(u_n^2 + 1)) \Rightarrow l = l - \ln(l^2 + 1)$.

On doit **résoudre** $l = l - \ln(l^2 + 1)$, or on l'a **déjà** résolu à la question 6, donc $l = 0$

| |
|---|
| **Conclusion** : $(u_n)$ converge vers 0. |

10)

$$\begin{aligned}
(2/3)^{n-1} < 0,001 &\Rightarrow \ln((2/3)^{n-1}) < \ln(0,001) \\
&\Rightarrow (n-1)\ln(2/3) < \ln(0,001) \\
&\Rightarrow n - 1 > \frac{\ln(0,001)}{\ln(2/3)} \text{ (car } 2/3 < 1\text{, donc } \ln(2/3) < \ln(1) = 0) \\
&\Rightarrow n > 1 + \frac{\ln(0,001)}{\ln(2/3)}
\end{aligned}$$

Donc $n = 19$.

| |
|---|
| Conclusion : Le rang $n$ à partir duquel $v_n < 0,001$ est $n = 17$. |

| |
|---|
| **Alors, tu as eu combien ? Si tu es toujours aussi chaud, je te conseille d'aller voir les autres cours disponibles dans la rubrique "Mathématiques" afin de cartonner pour le bac !** |