Lois des grands nombres

Définition :
Soit Ω un univers fini. Une **variable aléatoire réelle** X est une **fonction** de Ω vers $\mathbb{R}$.

Définition :
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles associées à une même **expérience aléatoire** sur un univers fini Ω. On définit la **variable aléatoire somme** $\mu X + Y$ définie sur Ω par :

$$(\mu X + Y)(\omega) = (\mu X)(\omega) + Y(\omega) = \mu \cdot X(\omega) + Y(\omega), \text{ avec } \omega \in \Omega \qquad (1)$$

Définition :
On définit **l'espérance mathématique d'une variable aléatoire** X prenant n **valeurs** $x_1, ..., x_n$ ayant respectivement pour **probabilité** $p_1, ..., p_n$ le nombre réel :

$$E(X) = p_1 \cdot x_1 + ... + p_n \cdot x_n = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot x_k \qquad (2)$$

Définition :
On définit la **variance d'une variable aléatoire** X prenant n **valeurs** $x_1, ..., x_n$ ayant respectivement pour **probabilité** $p_1, ..., p_n$ le nombre réel :

$$V(X) = p_1 \cdot (x_1 - E(X))^2 + ... + p_n \cdot (x_n - E(X))^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot (x_k - E(X))^2 \qquad (3)$$

Remarque :
La variance est toujours positive !

Définition :
On définit **l'écart-type d'une variable aléatoire** X prenant n **valeurs** $x_1, ..., x_n$ ayant respectivement pour **probabilité** $p_1, ..., p_n$ le nombre réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \qquad (4)$$

Formule :

(Koenig-Huygens) : Soit X une variable aléatoire. On a :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \tag{5}$$

Propriété :

L'espérance mathématique est linéaire. Autrement dit :

$$E(\mu X + Y) = \mu \cdot E(X) + E(Y) \tag{6}$$

Propriété :

La variance n'est PAS linéaire. On a :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) \Leftrightarrow X \text{ et } Y \text{ sont deux } \textbf{variables aléatoires indépendantes} \tag{7}$$

$$V(\mu X) = \mu^2 \cdot V(X) \tag{8}$$

Propriété :

Si $X_1, ..., X_n$ sont des **variables aléatoires indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre** p, alors $X = X_1 + \ldots + X_n$ suit une **loi binomiale de paramètres** n et p.

Réciproquement, si X suit **une loi binomiale de paramètres** n et p et que $X = X_1 + ... + X_n$ avec $X_1, ..., X_n$ **indépendantes**, alors $X_1, ..., X_n$ sont toutes **des variables aléatoires qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre** p.

Définition :

Une **liste** $(X_1; \ldots; X_n)$ de **variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la même loi est un échantillon** de taille n associée à cette loi.

Propriété :

Soit un **échantillon de taille** n $(X_1;\ldots;X_n)$ d'une variable aléatoire X. On pose **la variable aléatoire somme** S_n :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad M_n \textbf{ la variable aléatoire moyenne} : M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \tag{9}$$

On a :

$$E(S_n) = E(X_1 + ... + X_n) = n \cdot E(X) \tag{10}$$

$$E(M_n) = E\left(\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)\right) = E(X) \tag{11}$$

$$V(S_n) = V(X_1 + ... + X_n) = n \cdot V(X) \tag{12}$$

$$V(M_n) = V\left(\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)\right) = \frac{V(X)}{n} \tag{13}$$

$$\sigma(S_n) = \sigma(X_1 + ... + X_n) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X) \tag{14}$$

$$\sigma(M_n) = \sigma\left(\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)\right) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} \tag{15}$$

Inégalité :

(Bienaymé-Tchebychev) :

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$. Pour tout réel $\delta > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2} \tag{16}$$

Remarque :

Cette inégalité permet de majorer une probabilité !

Inégalité :

(Concentration) :

Soit $(X_1;\ldots;X_n)$ un échantillon de n variables aléatoires. Soit $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

Pour tout réel $\delta > 0$:

$$P(|M_n - E(M_n)| \geq \delta) \leq \frac{V(M_n)}{\delta^2} \Leftrightarrow P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2} \tag{17}$$

Théorème :

Loi faible des grands nombres :

Soit $(X_1; \ldots; X_n)$ un échantillon de n variables aléatoires. Soit $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

Pour tout réel $\delta > 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0 \tag{18}$$

Inégalité :

(Markov) (Hors-Programme) :

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives d'espérance $E(X)$. Pour tout réel $\delta > 0$:

$$P(X \geq \delta) \leq \frac{E(X)}{\delta} \tag{19}$$

Je ne mettrai pas d'exercices concernant ce chapitre ! Je vous conseille d'aller voir *l'exercice 2 du sujet tombé en Métropole le jour 1 en 2024* qui est très intéressant ! Cependant, les exercices proposés ci-dessous sont des démonstrations pour mieux comprendre les formules énoncées dans ce chapitre ! (je vous conseille de chercher à comprendre les démos)

Exercice 1 (10 points) : Autour des variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même univers fini. On considère X et Y prenant n valeurs $x_1; ...; x_n$, $y_1; ...; y_n$ de probabilité $p_1; ...; p_n$.

1. Démontrer en utilisant la **définition 3** que : $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
2. Démontrer en utilisant la **définition 4** que : $V(aX) = a^2 V(X)$
3. Démontrer en utilisant la **définition 4** la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ (2 pts)

Soit un échantillon de taille n $(X_1; ...; X_n)$ d'une variable aléatoire X.
Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

4. Démontrer que : $E(S_n) = n \cdot E(X)$
5. Démontrer que : $V(S_n) = n \cdot V(X)$
6. En déduire que : $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

On pose : $M_n = \frac{S_n}{n}$

7. Démontrer que : $E(M_n) = E(X)$
8. Démontrer que : $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$
9. En déduire que : $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Exercice 2 (8 points) : Autour des inégalités ...

Dans cet exercice, on admettra l'inégalité de Markov.

Soit X une variable aléatoire positive d'espérance $E(X)$. X prend n valeurs $x_1;\dots;x_n$ de probabilité respective $p_1;\dots;p_n$

1. Justifier que $|X-E(X)|\geq\delta\Leftrightarrow(X-E(X))^2\geq\delta^2$.
2. En déduire que $P(|X-E(X)|\geq\delta)=P((X-E(X))^2\geq\delta^2)$

On pose $Y=(X-E(X))^2$

3. En utilisant **l'inégalité de Markov**, démontrer ainsi que :
$$P(Y\geq\delta^2)\leq\tfrac{E(Y)}{\delta^2}$$
4. Démontrer en utilisant les deux questions précédentes que :
$$P(|X-E(X)|\geq\delta)\leq\tfrac{E((X-E(X))^2)}{\delta^2}$$
5. Démontrer en utilisant la **linéarité de l'espérance** que : $E((X-E(X))^2)=E(X^2)-(E(X))^2$
6. En utilisant la **formule de Koenig-Huygens**, conclure.

Soit $X_1;...;X_n$ un échantillon de n variables aléatoires indépendantes. On pose M_n la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

7. En utilisant **l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev**, démontrer que :
$$P(|M_n-E(X)|\geq\delta)\leq\tfrac{V(X)}{n\cdot\delta^2}$$
8. Démontrer la loi faible des grands nombres en utilisant **le théorème des gendarmes** et la question précédente.

Correction :

Exercice 1 :

1) Par définition : $E(X)=\sum_{k=1}^n p_k\cdot x_k$
Donc :

$$E(X+Y)=\sum_{k=1}^n p_k\cdot(x_k+y_k) \tag{20}$$
$$\Leftrightarrow E(X+Y)=\sum_{k=1}^n p_k\cdot x_k+p_k\cdot y_k \tag{21}$$

Par linéarité de la somme :

$$E(X+Y)=\sum_{k=1}^n p_k\cdot x_k+\sum_{k=1}^n p_k\cdot y_k \tag{22}$$
$$\Leftrightarrow E(X+Y)=E(X)+E(Y) \tag{23}$$

$\boxed{\text{D'où : } E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$

N.B : si vous n'êtes pas à l'aise avec la notation sigma, écrivez avec les points de suspension !

2) Par définition : $V(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot (x_k - E(X))^2$

Donc :

$$V(aX) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot (ax_k - E(aX))^2 \tag{24}$$

$$\Leftrightarrow V(aX) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot (ax_k - a \cdot E(X))^2 \text{ (par linéarité de l'espérance)} \tag{25}$$

$$\Leftrightarrow V(aX) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot (a \cdot (x_k - E(X)))^2 \text{ (factoriser par } a\text{)} \tag{26}$$

$$\Leftrightarrow V(aX) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot (a^2 \cdot (x_k - E(X))^2) \tag{27}$$

$$\Leftrightarrow V(aX) = a^2 \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot (x_k - E(X))^2 \text{ (car } a^2 \text{ ne dépend pas de la variable muette } k\text{)} \tag{28}$$

$$\Leftrightarrow V(aX) = a^2 V(X) \tag{29}$$

$\boxed{\text{D'où : } V(aX) = a^2 V(X)}$

3) Démonstration très formatrice et un peu dure ! Allons-y :

Par définition :

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot (x_k - E(X))^2 \tag{30}$$

$$\Leftrightarrow V(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot ((x_k)^2 - 2 \cdot x_k \cdot E(X) + (E(X))^2) \text{ (identité remarquable)} \tag{31}$$

$$\Leftrightarrow V(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot (x_k)^2 - 2 \cdot p_k \cdot x_k \cdot E(X) + p_k \cdot (E(X))^2 \text{ (distribuer)} \tag{32}$$

$$\Leftrightarrow V(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot (x_k)^2 - 2E(X) \cdot \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot x_k + ((E(X))^2) \cdot \sum_{k=1}^{n} p_k \text{ (linéarité de la somme)} \tag{33}$$

$$\Leftrightarrow V(X) = E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + ((E(X))^2) \cdot 1 \tag{34}$$

$$\Leftrightarrow V(X) = E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 \tag{35}$$

$$\Leftrightarrow V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \tag{36}$$

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$

4) On a :

$$E(S_n) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \tag{37}$$

$$\Leftrightarrow E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) \text{(car l'espérance est linéaire)} \tag{38}$$

$$\Leftrightarrow E(S_n) = n \cdot E(X) \tag{39}$$

$$\boxed{\text{Donc : } E(S_n) = n \cdot E(X)}$$

5)

$$V(S_n) = V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \tag{40}$$

$$\Leftrightarrow V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) \text{ (attention, ici } X_1; \ldots; X_n \text{ sont } \textbf{indépendantes, donc la linéarité marche} \text{!)} \tag{41}$$

$$\Leftrightarrow V(S_n) = n \cdot V(X) \tag{42}$$

Ainsi : $V(S_n) = n \cdot V(X)$

6) Par définition :

$$\sigma(S_n) = \sqrt{V(S_n)} \tag{43}$$
$$\Leftrightarrow \sigma(S_n) = \sqrt{n \cdot V(X)} \tag{44}$$
$$\Leftrightarrow \sigma(S_n) = \sqrt{n} \cdot \sqrt{V(X)} \tag{45}$$
$$\Leftrightarrow \sigma(S_n) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X) \tag{46}$$

D'où : $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

7)

$$E(M_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) \tag{47}$$
$$\Leftrightarrow E(M_n) = \frac{1}{n} \cdot E(S_n) \tag{48}$$
$$\Leftrightarrow E(M_n) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot E(X) \tag{49}$$
$$\Leftrightarrow E(M_n) = E(X) \tag{50}$$

Conclusion : $E(M_n) = E(X)$

8)

$$V(M_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) \tag{51}$$
$$\Leftrightarrow V(M_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot V(S_n) \text{ (\textbf{attention au carré}, la variance est vicieuse !)} \tag{52}$$
$$\Leftrightarrow V(M_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot n \cdot V(X) \tag{53}$$
$$\Leftrightarrow V(M_n) = \frac{V(X)}{n} \tag{54}$$

Il en résulte alors : $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$

9)

$$\sigma(M_n) = \sqrt{V(M_n)} \tag{55}$$

$$\Leftrightarrow \sigma(M_n) = \sqrt{\frac{V(X)}{n}} \tag{56}$$

$$\Leftrightarrow \sigma(M_n) = \frac{\sqrt{V(X)}}{\sqrt{n}} \tag{57}$$

$$\Leftrightarrow \sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} \tag{58}$$

Enfin : $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Exercice 2 :

1) Soit $\delta > 0$. Puisque $|X - E(X)| \geq \delta > 0$ et que **la fonction carrée est strictement croissante** sur $]0; +\infty[$, alors il découle que :

$$(|X - E(X)|^2) \geq \delta^2 \Leftrightarrow (X - E(X))^2 \geq \delta^2.$$

2) On en déduit aisément d'après la question précédente. D'où :

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) = P((X - E(X))^2 \geq \delta^2)$$

3) Soit $Y = (X - E(X))^2$. Alors, d'après **l'inégalité de Markov** (car Y est une v.a positive..) :

$P(Y \geq \delta^2) \leq \frac{E(Y)}{\delta^2}$ (*application de la formule*)

4) On a :

$$P(Y \geq \delta^2) \leq \frac{E(Y)}{\delta^2} \tag{59}$$

$$\Leftrightarrow P((X - E(X))^2 \geq \delta^2) \leq \frac{E((X - E(X))^2)}{\delta^2} \tag{60}$$

$$\Leftrightarrow P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{E((X - E(X))^2)}{\delta^2} \tag{61}$$

D'où : $P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{E((X-E(X))^2)}{\delta^2}$

5)

$$E((X-E(X))^2) = E(X^2 - 2X \cdot E(X) + (E(X))^2) \text{ (identité remarquable)} \tag{62}$$
$$= E(X^2) - 2 \cdot E(X) \cdot E(X) + (E(X))^2 \text{ (linéarité de l'espérance)} \tag{63}$$
$$= E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 \tag{64}$$
$$= E(X^2) - (E(X))^2 \tag{65}$$

Donc : $E((X-E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$

6) On a vu que, **d'après la formule de Koenig-Huygens** :

$$E(X^2) - (E(X))^2 = V(X)$$

D'où $E((X-E(X))^2) = V(X)$. Ainsi :

$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$

7) On a : $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$

On sait que : $E(M_n) = E(X)$ et $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$ (on a déjà démontré)

Donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|M_n - E(M_n)| \geq \delta) \leq \frac{V(M_n)}{\delta^2} \tag{66}$$
$$\Leftrightarrow P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n \cdot \delta^2} \tag{67}$$

Puisque $E(M_n) = E(X)$ et $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$

8) On sait qu'une **probabilité est supérieure ou égale à 0**. Donc :

$$P(|M_n - E(M_n)| \geq \delta) \geq 0.$$

Par ailleurs, d'après la question précédente : $P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n \cdot \delta^2}$

Ainsi : $0 \leq P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n \cdot \delta^2}$

On a : $\lim_{n \to +\infty} n \cdot \delta^2 = +\infty$ (δ^2 étant une constante > 0)

Donc : $\lim_{n \to +\infty} \frac{V(X)}{n \cdot \delta^2} = 0$ ($V(X)$ étant un nombre constant)

D'après le **théorème des gendarmes** : $\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0$.

$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0$

Alors, tu as eu combien ? Si tu es toujours aussi chaud, je te conseille d'aller voir les autres cours disponibles dans la rubrique *"Mathématiques"* afin de cartonner pour le bac !