Probabilités Conditionnelles

Avant de commencer, je vous conseille fortement de faire sérieusement les exemples proposés qui sont formateurs et vous préparent pour le bac ! Si vous savez faire les exemples, vous êtes plus que prêt pour le bac ! Regarder la solution APRES avoir cherché !

1 Rappels

Définition 1 :

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du **hasard**.
- Les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle une **issue**.
- L'ensemble Ω constitue tous les **résultats possible** d'une expérience aléatoire et s'appelle univers.
- Un évènement est un **sous-ensemble** (on dit aussi une partie) de l'**univers** Ω.
- On appelle **évènement certain l'univers** Ω tandis qu'on appelle **évènement impossible l'ensemble vide** $\emptyset$.
- On appelle **évènement élémentaire** un évènement ne contenant qu'**un seul élément**.

Définition 2 :

- Soit A un évènement inclus dans l'univers Ω. L'**évènement contraire** de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de l'univers Ω qui **ne sont pas** dans A.
- Soit B un évènement inclus dans l'univers Ω. L'évènement A ou B, qui se note $A \cup B$, est **la réunion des ensembles** A et B. Cela correspond à l'ensemble des éléments de l'univers Ω qui appartiennent à A ou à B.
- L'évènement A et B, qui se note $A \cap B$, est **l'intersection des ensembles** A et B. Cela correspond à l'ensemble des éléments de l'univers Ω qui appartiennent à A et à B.
- Deux évènements A et B sont **incompatibles** lorsque les ensembles A et B sont **disjoints**, autrement dit si $A \cap B = \emptyset$.

2 Propriétés des probabilités

Définition 1 :
On note Ω l'univers. On dit qu'une **probabilité** sur Ω est une fonction de Ω vers $[0, 1]$ qui vérifie :

- $p(\Omega) = 1$
- pour tous événements A et B **incompatibles** :
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Théorème 1 :
Soit Ω l'univers et A et B deux évènements. On a :

- $p(\emptyset) = 0$
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$, avec $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Remarque : Lorsque A et B sont **disjoints**, alors $A \cap B = \emptyset$, donc $p(A \cap B) = 0$
Ainsi, puisque $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ et que $p(A \cap B) = 0$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ lorsque A et B sont disjoints (on retombe sur la définition 1).

Définition 2 :
Lorsque tous les évènements **élémentaires** ont la **même probabilité**, on dit alors que l'expérience aléatoire est **équiprobable**.

Exemple : Soient A et B deux évènements de l'univers Ω tels que :

- $p(A) = 0,4$
- $p(A \cup B) = 0,8$ et
- $p(A \cap B) = 0,3$.

Calculer $p(\overline{B})$

Solution :
On a :

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) &(1)\\ \Rightarrow p(B) &= p(A \cup B) + p(A \cap B) - p(A) &(2) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} p(\overline{B}) &= 1 - p(B) &(3)\\ \Rightarrow p(\overline{B}) &= 1 - (p(A \cup B) + p(A \cap B) - p(A)) &(4)\\ \Rightarrow p(\overline{B}) &= 1 + p(A) - (p(A \cup B) + p(A \cap B)) &(5) \end{aligned}$$

Conclusion : $p(\overline{B}) = 1 + 0,4 - (0,8 + 0,3) = 0,3$

3 Probabilités conditionnelles

Définition 1 :
Soient A et B deux évènements, avec $p(A) \neq 0$. La probabilité de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé, notée $p_A(B)$, est définie par :

- $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

Conséquence : Soient A et B deux évènements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. On a :
$p(A \cap B) = p(A) \cdot p_A(B) = p(B) \cdot p_B(A)$.

Définition 2 :
On considère n évènements $A_1, \ldots, A_n$ de l'univers Ω de probabilités non nulles tels que :

- $p(A_1 \cap ... \cap A_n) = 0$
- $p(A_1 \cup ... \cup A_n) = \Omega$

On dit alors que les évènements $A_1, \ldots, A_n$ forment **une partition** de l'univers Ω.

Formules des probabilités totales :
Soient B un évènement et $A_1, \ldots, A_n$ n évènement formant une **partition de l'univers** Ω. Alors, **d'après la formule des probabilités totales :**

- $p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \ldots + p(A_n \cap B)$

Remarque : Inutile d'apprendre cette formule par cœur puisqu'en particulier, tout évènement A et son contraire $\overline{A}$ forment une partition de l'univers Ω. Ainsi, **d'après la formule des probabilités totales :**

- $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$ **(retenez plutôt cette formule)**

Conséquence : Puisque $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$, alors :

- $p(B) = p(A) \cdot p_A(B) + p(\overline{A}) \cdot p_{\overline{A}}(B)$

De manière générale, on présentera une expérience aléatoire possédant deux étapes successives sous forme d'arbre de probabilité.

Propriété 1 :

1. La **somme des probabilités** des branches **issues d'un même nœud** est égale à **1**.
2. La **probabilité d'un évènement** en bout de branche est égale **au produit des probabilités inscrites sur le chemin.**
3. La **probabilité d'un évènement** est la **somme des probabilités des chemins menant à cet évènement.**

Remarque :

1. traduit que la **somme des probabilités à chaque étape vaut 1**.
2. traduit la formule des **probabilités conditionnelles**. En effet : $p(A \cap B) = p(A) \cdot P_A(B)$
3. traduit la formule des **probabilités totales**. En effet : $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$

4 Indépendance

Définition 1 :
On dit que deux évènements A et B sont **indépendants** lorsque :
$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Conséquence : Soient A et B deux évènements.
A et B **indépendants** $\Leftrightarrow p(B) = p_A(B) \Leftrightarrow p(A) = p_B(A)$

Vous trouverez de nombreux exercices corrigés sur le site AP-MEP concernant les probabilités. Des sujets de bac regorgent de nombreux exercices portant sur les probabilités conditionnelles ! Je vous conseille d'aller voir les autres cours disponibles dans la rubrique *"Mathématiques"* afin de cartonner pour le bac !