Produit scalaire de l'espace

Dans ce chapitre, $\mathcal{E}$ désigne un **espace affine euclidien**.

I) Produit scalaire de l'espace

Définition 1. *En choisissant une* ***unité de longueur*** *dans l'espace $\mathcal{E}$, le* ***produit scalaire de deux vecteurs*** *$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est* ***le nombre*** *noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par :*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2) \tag{1}$$

Théorème 1. *Deux vecteurs de l'espace $\mathcal{E}$ sont* ***nécessairement coplanaires****.*

Définition 2. *Si α est la mesure de* ***l'angle géométrique*** *associé à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, alors :*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos(\alpha) \tag{2}$$

Définition 3. *Soit $\mathcal{P}$ un* ***plan*** *de l'espace $\mathcal{E}$. On considère la* ***droite*** *(AB)* ***incluse*** *dans le* ***plan*** *$\mathcal{P}$. Si H est le* ***projeté orthogonal*** *de C sur (AB), alors :*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \tag{3}$$

Remarque 1.
- *Les définitions énoncées, étant vraies dans le plan resteront vraies dans l'espace.*
- ***De manière générale, on utilisera pas la définition 1.***

Propriété 1 (Calculs vectoriels)**.** *Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de $\mathcal{E}$. Pour tout k de $\mathbb{R}$:*
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
- $\overrightarrow{u} \cdot (k \cdot \overrightarrow{v}) = k \cdot \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = (\overrightarrow{u})^2 + 2 \cdot \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + (\overrightarrow{v})^2$
- $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = (\overrightarrow{u})^2 - 2 \cdot \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + (\overrightarrow{v})^2$
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u})^2 - (\overrightarrow{v})^2$

Propriété 2 (Calcul avec les normes)**.** *Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de $\mathcal{E}$. Alors :*
- $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2 \cdot \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$

Propriété 3. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathcal{E}$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** si, et seulement si, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$*

$$(\overrightarrow{u}) \perp (\overrightarrow{v}) \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \tag{4}$$

Définition 4. *Soit R un **repère orthonormé** de $\mathcal{E}$ et soit $\overrightarrow{u}(x; y; z)$. Alors :*

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{5}$$

Propriété 4. *Soit R un **repère orthonormé** de $\mathcal{E}$. Si $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y'; z')$, alors :*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z' \tag{6}$$

II) Plans de l'espace

Propriété 5.
- ***Il suffit de deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{E}$ pour former un plan $\mathcal{P}$.***

Remarque 2. *En effet, **deux vecteurs directeurs non colinéaires d'un plan $\mathcal{P}$ forment une base** de $\mathcal{P}$.*

Définition 5.
- *Une **base orthonormée** est une famille de vecteurs deux à deux **orthogonaux** et de **norme 1**.*

Propriété 6.
- *Deux droites (D) et (D') de $\mathcal{E}$ sont **perpendiculaires** $\Leftrightarrow$ (D) et (D') sont **orthogonales et coplanaires**.*
- *Deux droites (D) et (D') de $\mathcal{E}$ sont **orthogonales** $\Leftrightarrow$ leurs **vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux**.*
- *Deux droites (D) et (D') de $\mathcal{E}$ sont **coplanaires** $\Leftrightarrow$ (D) et (D') sont **sécantes** OU (D) et (D') sont **parallèles.***

Définition 6. *Soit $\mathcal{P}$ un plan dirigé par **deux vecteurs non colinéaires** $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et $A \in \mathcal{P}$.*
- *Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est dit **normal au plan** $\Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0 = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} \Leftrightarrow$ Pour tout M de $\mathcal{P}$, $(\overrightarrow{AM}) \perp (\overrightarrow{n})$.*

Remarque 3.
- *Pour montrer qu'un **vecteur est normal à un plan**, il suffit de montrer qu'il est **orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan.***

Exemple : Soit $ABCDEFGH$ ***un cube (dessinez un cube). Montrer que le vecteur*** $\overrightarrow{EC}$ ***est normal au plan*** (BGD)***.***

Solution : Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{DG}$ n'étant pas colinéaires, ils forment alors une base du plan (BGD). ***Ainsi, il faut montrer que*** $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0 = \overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{DG}$.

Une astuce aurait été de poser un **repère orthonormé** $R = (A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$, mais le but de l'exercice est de **manipuler des expressions vectorielles.**

On a :

$$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BD}\cdot(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}) \quad \text{(Relation de Chasles)} \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC} \quad \text{(distributivité)} \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BD}+(\overrightarrow{BC})^2 \quad \text{(en posant } \overrightarrow{BC} \text{ le projeté orthogonal de } \overrightarrow{BD} \text{ sur } \overrightarrow{BC}\text{)} \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EC} = -(\overrightarrow{BA})^2+(\overrightarrow{BC})^2 \quad \text{(en posant } \overrightarrow{BA} \text{ le projeté orthogonal de } \overrightarrow{BD} \text{ et } \overrightarrow{BE} \text{ sur } \overrightarrow{BA}\text{)} \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EC} = 0 \quad (\text{car } BA = BC) \tag{11}$$

Ainsi : $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EC} = 0$

De même :

$$\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DG}\cdot(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}) \quad \text{(Relation de Chasles)} \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{DC} \quad \text{(distributivité)} \tag{13}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{DA}+(\overrightarrow{DC})^2 \quad \text{(car } \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EA}\text{, et en posant } \overrightarrow{DC} \text{ le projeté orthogon} \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{GD}\cdot\overrightarrow{GC}-0+(\overrightarrow{DC})^2 \quad (\text{car } (\overrightarrow{DG}) \perp (\overrightarrow{DA})) \tag{15}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{EC} = -(\overrightarrow{GC})^2+(\overrightarrow{DC})^2 \quad \text{(projeté orthogonal)} \tag{16}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{EC} = 0 \quad (\text{car } GC = DC) \tag{17}$$

Ainsi : $\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{EC} = 0$

Conclusion : Puisque $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EC} = 0 = \overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{EC}$ est normal au plan (BGD).

Propriété 7. — *Deux plans* $(\mathcal{P})$ *et* $(\mathcal{P}')$ *sont* ***perpendiculaires*** $\Leftrightarrow$ ***un vecteur normal*** *de* $(\mathcal{P})$ *est* ***un vecteur directeur*** *de* $(\mathcal{P}')$ $\Leftrightarrow$ *un* ***vecteur normal*** *de* $(\mathcal{P}')$ *est un* ***vecteur directeur*** *de* $(\mathcal{P})$.

III) Equation cartésienne d'un plan dans l'espace

Définition 7. *Soit R un* ***repère orthonormé*** *de $\mathcal{E}$.*

- *Tout plan $\mathcal{P}$ de* ***vecteur normal*** *$\overrightarrow{n}(a;b;c)$ différent du* ***vecteur nul*** *admet* ***une équation cartésienne de la forme :*** *$ax+by+cz+d=0$, d de $\mathbb{R}$.*
- *$M(x;y;z) \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$*
- *L'****ensemble des points*** *$M(x;y;z)$ de $\mathcal{E}$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un* ***plan*** *$(\mathcal{P})$ de* ***vecteur normal*** *$\overrightarrow{n}(a;b;c)$.*

Propriété 8. — *On appelle* ***distance d'un point*** *M* ***à un plan*** *$(\mathcal{P})$ la* ***longueur*** *MH où H est* ***le projeté orthogonal*** *de M sur $(\mathcal{P})$.* ***Cette distance est la plus courte distance*** *entre le point M et un point de $(\mathcal{P})$.*

Propriété 9. *Soient $(\mathcal{P}) : ax+by+cz+d=0$ et $(\mathcal{P}') = a'x+b'y+c'z+d'=0$ deux plans de l'espace $\mathcal{E}$. Soit $\overrightarrow{n}(a;b;c)$ et $\overrightarrow{n}'(a';b';c')$ deux vecteurs respectivement normaux à $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$. Alors :*

- $(\mathcal{P})//(\mathcal{P}') \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{n} = k \cdot \overrightarrow{n}'$
- *$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$* ***sécants*** *$\Leftrightarrow \overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$* ***ne sont pas colinéaires***

Propriété 10. *On considère $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de $\mathcal{E}$, un plan $(\mathcal{P}) : ax+by+cz+d=0$ un plan de $\mathcal{E}$ avec $(a;b;c) \neq (0;0;0)$. Soit H le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{P})$.* ***La distance*** *du point A au plan $(\mathcal{P})$ est* ***la distance*** *AH. On a :*

- $AH = d(A;(\mathcal{P})) = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

IV) Exercices :

Exercice 1 (4 points) :

Soit $\mathcal{E}$ un espace muni d'un repère orthonormé R. Soient A(1 ; -1 ; 2), B(3 ; 3 ; 8), C(-3 ; 5 ; 4) et D(1 ; 2 ; 3) Soient (D) et (D') les droites ayant respectivement pour représentations paramétriques : $(D) : \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-1 \\ z = 3t+2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

et (D') : $\begin{cases} x = k+1 \\ y = k+3 \\ z = -k+4 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

Soit $(\mathcal{P}) : x + y - z + 2 = 0$

1) Démontrer que (D) et (D') sont orthogonales.

2) Démontrer que le plan $(\mathcal{P})$ contient la droite (D) et est orthogonal à la droite (D')

3) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

4) Soit $(\mathcal{P}')$ le plan contenant (D') et le point A. Déterminer une équation cartésienne de $(\mathcal{P}')$.

Exercice 2 (8 points) :

Soit $\mathcal{E}$ un espace muni d'un repère orthonormé R. Soient $A(0\,;\,4\,;\,1)$, $B(1\,;\,3\,;\,0)$, $C(2\,;\,\text{-}1\,;\,\text{-}2)$ et $D(7\,;\,\text{-}1\,;\,4)$

1) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Soit (D) la droite passant par D de vecteur directeur $\vec{u}\,(2\,;\,\text{-}1\,;\,3)$. Démontrer que (D) est orthogonale au plan (ABC).

3) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

4) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D).

5) Déterminer les coordonnées du point L, point d'intersection entre la droite (D) et le plan (ABC).

6) Soient $(\mathcal{P}) : x + y + z = 0$ et $(\mathcal{P}') : x + 4y + 2 = 0$.

Démontrer que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants.

7) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d), intersection du plan $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

8) La droite (d) et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 3 (4 points) :

Soient A(-2 ; 2 ; 1), B(1 ; 0 ; 2) et C(-1 ; 4 ; 0)
Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

V) Corrections :

Exercice 1 :

1) Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}$(1 ; 2 ; 3). Un vecteur directeur de (D') est $\vec{v}$(1 ; 1 ; -1) Donc :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times (-1) = 0$

D'où (D) et (D') orthogonales.

2) Vérifions que la droite (D) est incluse dans $(\mathcal{P})$: Si (D) est incluse dans $(\mathcal{P})$, alors elle vérifie l'équation cartésienne de $(\mathcal{P})$. On a :

$$\begin{aligned}(t+1)+(2t-1)-(3t+2)+2 &= 3t-3t-2+2 \\ &= 0\end{aligned}$$

D'où (D) incluse dans $(\mathcal{P})$.

On a un vecteur normal de $(\mathcal{P})$ $\vec{n}$(1 ; 1 ; -1) $= \vec{v}$, d'où (D') et $(\mathcal{P})$ orthogonaux.

3) On calcule AB, AC et BC, et on trouve : $AB = AC = BC = \sqrt{56}$, d'où le triangle ABC équilatéral.

4) Fixons $k = 0$ et on note E(1 ; 3 ; 4) appartenant à (D'). $\overrightarrow{AE}$(0 ; 4 ; 2)

De plus, puisque (D') incluse dans $(\mathcal{P}')$, alors $\overrightarrow{v}$ appartient à $(\mathcal{P}')$

On remarque que $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires, donc forment une base de $(\mathcal{P}')$.

Trouvons alors $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $(\mathcal{P}')$ tel que $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v}$

En posant : $\vec{n}(a;b;c)$, nous devons résoudre le système $\begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c=0 \\ 4b+2c=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c=0 \\ 2b+c=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c=0 \\ a+3b=0 \quad (L2 \to L1 + L2) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-3b \\ b=b \\ c=a+b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-3b \\ b=b \\ c=-2b \end{cases}$$

Donc : $\overrightarrow{n}(a;b;c) \Leftrightarrow \overrightarrow{n}(-3b;b;-2b)$, $b \in \mathbb{R}^*$ En choisissant n'importe quelle valeur de b (hormis 0), on obtient un vecteur normal au plan $(\mathcal{P}')$. En posant $b=-1$, on obtient $\overrightarrow{n}(3;-1;2)$

Donc :
$M(x;y;z) : (\mathcal{P}') : 3x-y+2z+d=0$, $d \in \mathbb{R}$. Or A appartient à $(\mathcal{P}')$, donc :

$$\begin{aligned} 3x_A - y_A + 2z_A + d = 0 &\Leftrightarrow 3\times(-2) - 2 + 2\times 1 + d = 0 \\ &\Leftrightarrow -6-2+2+d=0 \\ &\Leftrightarrow -6+d=0 \\ &\Leftrightarrow d=6 \end{aligned}$$

Conclusion :

Pour tout $M(x;y;z)$, $(\mathcal{P}') : 3x-y+2z+6=0$

Exercice 2 :

1) On a : $\overrightarrow{AB}$(1 ; -1 ; -1) et $\overrightarrow{AC}$(2 ; -5 ; -3)

On remarque aisément que les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi, les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan. (AB) et (AC) étant deux droites sécantes du plan (ABC), on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AB} &= 2\times 1+(-1)\times(-1)+3\times(-1)\\ &= 2+1-3\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AC} &= 2\times 2+(-1)\times(-5)+3\times(-3)\\ &= 4+5-9\\ &= 0\end{aligned}$$

Conclusion : La droite (D) est perpendiculaire au plan (ABC).

3) Puisque (D) est perpendiculaire au plan (ABC), alors $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC). Soit $M(x;y;z)$ un point du plan (ABC) ; on a alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{u}=0 &\Leftrightarrow 2(x-0)-(y-4)+3(z-1)=0\\ &\Leftrightarrow 2x-y+4+3z-3=0\\ &\Leftrightarrow 2x-y+3z+1=0\end{aligned}$$

Conclusion : $(ABC) : 2x-y+3z+1=0$

4) Soit $M(x;y;z)$ un point quelconque de (D). On a alors :

$$(D) : \begin{cases} x=7+2t \\ y=-1-t \\ z=4+3t \end{cases} ,t\in\mathbb{R}$$

5) Soit $H(x;y;z) \in (D) \cap (\text{ABC}).Alors$:

$$\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \\ 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \\ 2(7 + 2t) - (-1 - t) + 3(4 + 3t) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \\ 14 + 4t + 1 + t + 12 + 9t + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \\ 14t + 28 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \\ t = -2 \end{cases}$$

En remplaçant t par -2 dans la représentation paramétrique de (D), on obtient donc $H(3;1;-2)$

Conclusion : Le point d'intersection H a pour coordonnées : $H(3;1;-2)$

6) Soient $(\mathcal{P}) : x + y + z = 0$ et $(\mathcal{P}') : x + 4y + 2 = 0$.
Si $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont **sécants**, alors leurs **vecteurs normaux ne sont pas colinéaires**. On a $\overrightarrow{n}(1\,;\,1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{n'}(1\,;\,4\,;\,0)$ et on remarque facilement que les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Donc $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants.

7) Soit $(d) \in (\mathcal{P}) \cap (\mathcal{P}')$. Si $M(x;y;z)$ appartient à la droite (d), alors :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+4y+2=0 \end{cases} \quad & \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-z \\ (-y-z)+4y+2=0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-z \\ 3y+2-z=0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-z \\ y=y \\ z=3y+2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-(3y+2) \\ y=y \\ z=3y+2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4y-2 \\ y=y \\ z=3y+2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion : $M(x;y;z) \in (d) \Leftrightarrow (d) : \begin{cases} x=-4y-2 \\ y=y \\ z=3y+2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x=-4y-2 \\ y=y \\ z=3y+2 \end{cases}, \; y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (d) : \begin{cases} x=-4k-2 \\ y=k \\ z=3k+2 \end{cases}, \; k \in \mathbb{R}$$

(nous venons de "créer" une représentation paramétrique de paramètre y qu'on peut remplacer par k !)

8) **Supposons par l'absurde que** (d) et le plan (ABC) **sont sécants.** Alors, il existe un point $H(x;y;z) \in$ (d)∩(ABC). Alors :

$$\begin{cases} x = -4k - 2 \\ y = k \\ z = 3k + 2 \\ 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4k - 2 \\ y = k \\ z = 3k + 2 \\ 2(-4k-2) - k + 3(3k+2) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4k - 2 \\ y = k \\ z = 3k + 2 \\ -8k - 4 - k + 9k + 6 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4k - 2 \\ y = k \\ z = 3k + 2 \\ 3 = 0 \quad \text{(impossible !)} \end{cases}$$

Ceci est **absurde**, donc **il n'existe pas de point d'intersection**, donc (d) et le plan (ABC) ne sont pas **sécants**.

Conclusion : La droite (d) et le plan (ABC) sont **parallèles**.

Exercice 3 :

On a : $A(-2;2;1)$, $B(1;0;2)$ et $C(-1;4;0)$

On calcule $\overrightarrow{AB}$(3 ; -2 ; 1) et $\overrightarrow{AC}$(1 ; 2 ; -1)

Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc forment une base du plan (ABC).

Soit $\overrightarrow{n}(a;b;c)$ un vecteur normal au plan (ABC). Alors :

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot \vec{AC} = 0 \\ \vec{n}\cdot \vec{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b-c=0 \\ 3a-2b+c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b-c=0 \\ 4a=0 \quad (L2 \to L1 + L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ 2b-c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=b \\ c=2b \end{cases}$$

Donc $(a;b;c) = (0;b;2b) = b(0;1;2)$, avec $b \in \mathbb{R}^*$.

On obtient ici **l'ensemble de tous les vecteurs normaux** au plan (ABC).
Il suffit donc de choisir une valeur de b, disons $b = 1$.
Alors, le vecteur $\overrightarrow{n}(0\,;\,1\,;\,2)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Ainsi, pour tout $M(x;y;z)$ du plan, $(ABC) : y + 2z + d = 0$

Or $B \in (ABC)$, donc : $y_B + 2z_B + d = 0 \Leftrightarrow 0 + 2 \times 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$.

Conclusion : Pour tout $M(x;y;z)$ du plan (ABC), on a :

$$(ABC) : y + 2z - 4 = 0$$

Alors, tu as eu combien ? Si tu es toujours aussi chaud, je te conseille d'aller voir les autres cours disponibles dans la rubrique *"Mathématiques"* afin de cartonner pour le bac !