Les suites et la récurrence simple

Avant de commencer, je vous conseille fortement de faire sérieusement les exemples proposés qui sont formateurs et vous préparent pour le bac ! Si vous savez faire les exemples, vous êtes plus que prêt pour le bac ! Regarder la solution APRÈS avoir cherché !

1 Propriétés à connaître sur les suites numériques

Propriété-Définition

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels).

- La suite (u_n) est croissante $\Leftrightarrow$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n > 0$
- La suite (u_n) est décroissante $\Leftrightarrow$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n < 0$

Remarque

Une suite (u_n) est monotone $\Leftrightarrow$ (u_n) est croissante ou (u_n) est décroissante.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{3n+2}{2n+1}$
Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Solution

Étudions la monotonie de la suite (u_n) :

On a : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3(n+1)+2}{2(n+1)+1} - \frac{3n+2}{2n+1} \\ &= \frac{3n+3+2}{2n+2+1} - \frac{3n+2}{2n+1} \\ &= \frac{3n+5}{2n+3} - \frac{3n+2}{2n+1} \end{aligned}$$

Pour mettre ces fractions sous le même dénominateur, on multiplie :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(3n+5)(2n+1)}{(2n+3)(2n+1)} - \frac{(3n+2)(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{(3n+5)(2n+1) - (3n+2)(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} \end{aligned}$$

Développons le numérateur :

$$\begin{aligned} (3n+5)(2n+1) &= 6n^2 + 3n + 10n + 5 \\ &= 6n^2 + 13n + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3n+2)(2n+3) &= 6n^2 + 9n + 4n + 6 \\ &= 6n^2 + 13n + 6 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{6n^2 + 13n + 5 - (6n^2 + 13n + 6)}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{-1}{(2n+1)(2n+3)} \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(2n+1) > 0$ et $(2n+3) > 0$, donc par produit de deux quantités positives : $(2n+1)(2n+3) > 0$.

Donc $\frac{-1}{(2n+1)(2n+3)} < 0$

Conclusion

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$, donc la suite (u_n) est décroissante.

Propriété-Définition

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

— La suite (u_n) est majorée $\Leftrightarrow$ il existe un réel M tel que pour tout entier n : $u_n \leq M$

— La suite (u_n) est minorée $\Leftrightarrow$ il existe un réel m tel que pour tout entier n : $u_n \geq m$

— La suite (u_n) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée. Autrement dit, (u_n) est bornée $\Leftrightarrow$ pour tout entier n : $m \leq u_n \leq M$

Exemple

Reprenons la suite de l'exemple 1. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{3n+2}{2n+1}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{3}{2} < u_n \leq 2$

Solution

Puisque nous n'avons pas encore vu la récurrence dans ce cours, nous allons chercher une technique pour y parvenir (une récurrence sur cette question aurait été compliquée). L'idée est de démontrer cette double inégalité en 2 temps !

(1) Montrons dans un premier temps que : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{3}{2} < u_n$

Pour ce faire, on va calculer la **différence** !

$$u_n - \frac{3}{2} = \frac{3n+2}{2n+1} - \frac{3}{2}$$

Mettons sous le même dénominateur :

$$\begin{aligned} u_n - \frac{3}{2} &= \frac{2(3n+2)}{2(2n+1)} - \frac{3(2n+1)}{2(2n+1)} \\ &= \frac{2(3n+2) - 3(2n+1)}{2(2n+1)} \\ &= \frac{6n+4-6n-3}{4n+2} \\ &= \frac{1}{4n+2} \end{aligned}$$

On sait que $4n+2 > 0$, donc $\frac{1}{4n+2} > 0$, d'où $u_n - \frac{3}{2} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Conclusion

On a donc : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < u_n$

Solution

(2) Montrons dans un second temps que : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq 2$
Pour ce faire, même procédé que (1), on calcule la **différence**.

$$\begin{aligned} u_n - 2 &= \frac{3n+2}{2n+1} - 2 \\ &= \frac{3n+2}{2n+1} - \frac{2(2n+1)}{2n+1} \\ &= \frac{3n+2-2(2n+1)}{2n+1} \\ &= \frac{3n+2-4n-2}{2n+1} \\ &= \frac{-n}{2n+1} \end{aligned}$$

On sait que $n \geq 0$ et $2n+1 > 0$, donc par quotient $\frac{n}{2n+1} \geq 0$, donc $-\frac{n}{2n+1} \leq 0$, d'où $u_n - 2 \leq 0$

Conclusion

On a donc : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n - 2 \leq 0$, donc $u_n \leq 2$

Ainsi, en combinant (1) et (2), on a bien démontré que : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{3}{2} < u_n \leq 2$

Propriété-Définition

— Soit (u_n) une suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + r$, avec r un réel. On dit alors que (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

— Soit (v_n) une suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = q \cdot v_n$, avec q un réel différent de 1. On dit alors que (v_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0.

— Soit (w_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_{n+1} = a \cdot w_n + b$, avec a, b réels différents de 0. On dit alors que (w_n) est une suite arithmético-géométrique.

Propriété

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Ainsi, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 + n \cdot r$.
- Soit (v_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0. Ainsi, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 \cdot q^n$.

Remarque

- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p, avec $p > 0$, alors on a : pour tout $n \geq p$: $u_n = u_p + (n-p) \cdot r$
- Si (v_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme v_p, avec $p > 0$, alors on a : pour tout $n \geq p$: $v_n = v_p \cdot q^{n-p}$
- Une formule explicite d'une suite arithmético-géométrique n'est pas au programme. Voir l'exercice type à la fin de ce cours pour pouvoir en traiter un exemple.

Propriété

Pour q différent de 1 :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Propriété

Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0, alors :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2}$$

Propriété

Si (v_n) est une suite géométrique de raison q différent de 1 et premier terme v_0, alors :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = v_0 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

2 Raisonnement par récurrence

Propriété-Définition

Le raisonnement par récurrence se divise en 3 étapes :

1. **Initialisation** : on vérifie si la propriété à démontrer est vraie au premier rang.
2. **Hérédité** : on suppose que la propriété est vraie en un rang quelconque n, avec n fixé. Le but est alors de démontrer que la propriété est héréditaire, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n+1$.
3. **Conclusion** : on conclut en affirmant que puisque la propriété est initialisée et héréditaire, alors elle est toujours vraie.

Remarque

Dans l'hérédité, la propriété qu'on suppose vraie en un rang fixé n est appelée **hypothèse de récurrence**.

Exemple

Montrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Solution

Procédons à un raisonnement par récurrence sur n dans $\mathbb{N}^*$. Soit $P(n)$ la propriété : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation : pour $n = 1$: $\frac{1(1+1)}{2} = 1$, d'où $P(1)$ vraie (pour la quantité avec le $\sum$, ici n vaut 1 donc il n'y a que 1, d'où l'égalité).

Hérédité : À n dans $\mathbb{N}^*$ fixé, supposons $P(n)$ vraie ; démontrons alors $P(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \text{(car on a supposé que } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\text{)}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

d'où l'hérédité.

Conclusion

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et héréditaire à partir de ce rang. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Propriété

Inégalité de Bernoulli

Pour tout réel a strictement positif et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a$

Exemple

Démontrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli énoncée dans la propriété 2.

Solution

Procédons à un raisonnement par récurrence sur n dans $\mathbb{N}$. Soit $P(n)$ la propriété : $(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a$

Initialisation : pour $n = 0$: $(1+a)^0 = 1$. De l'autre côté : $1+0\cdot a = 1$, donc $(1+a)^0 \geq 1 + 0 \cdot a$, d'où $P(0)$ vraie.

Hérédité : À n dans $\mathbb{N}$ fixé, supposons $P(n)$ vraie ; démontrons alors $P(n+1)$:

$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a)$. Or, par hypothèse de récurrence : $(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a$. Donc :

$$\begin{aligned}(1+a)^n \cdot (1+a) &\geq (1+n\cdot a)\cdot(1+a) \\ \text{donc } (1+a)^{n+1} &\geq 1 + a + n\cdot a + n \cdot a^2\end{aligned}$$

Or, $n \cdot a^2 \geq 0$, donc $(1+a)^{n+1} \geq 1 + a + n\cdot a + 0$, donc $(1+a)^{n+1} \geq$

$1+(1+n)\cdot a$, donc $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)\cdot a$, d'où l'hérédité.

Conclusion

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et héréditaire à partir de ce rang. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(1+a)^n \geq 1+n\cdot a$

Vous êtes chauds si vous êtes arrivés jusque là ! Voyons voir si vous allez pulvériser les exercices qui arrivent !

Exercices type sur les suites !

(Ne pas regarder la correction sans avoir cherché)

Exercice 1 (7 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}\cdot u_n}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

1) a) Calculer u_1 et u_2

b) Montrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{(\sqrt{2}-2)(u_n-1)}{2}$

d) En déduire que (u_n) est décroissante.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - 1$

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison q à déterminer et de premier terme $v_0 = 1$.

b) En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 2 (4 points)

Soit (v_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

2) Démontrer que la suite (v_n) est minorée par 0 (c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $v_n > 0$)

3) Démontrer que la suite (v_n) est majorée par $\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n < \frac{1}{2}$)

4) Que peut-on dire de la suite (v_n) ?

Exercice 3 (5 points)

Soit la suite (u_n) définie par : $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \frac{25}{10-u_n}$

1) a) Vérifier que $5 - u_{n+1} = \frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$

b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $5 - u_n > 0$

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \frac{5}{5-u_n}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $v_{n+1} = \frac{10-u_n}{5-u_n}$

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} - v_n = 1$, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = n$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = 5 - \frac{5}{n}$

Exercice 4 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f(x) = e^{x/2}$

1) Démontrer que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$

2) Calculer u_1 et u_2.

3) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n > e - 1$

4) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} > u_n$

Correction des exercices

Exercice 1

On a la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

1.a

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot u_0 + \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 + \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\
u_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot u_1 + \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) + \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}^2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

1.b

On raisonne par récurrence. Soit $P(n)$ la propriété : $u_n > 1$
Initialisation : $u_0 = 2 > 1$ donc $P(0)$ vraie.
Hérédité : Supposons $u_n > 1$.

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 1$$

Donc $P(n+1)$ vraie.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

1.c

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} - u_n \\
&= u_n\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}-2}{2}(u_n - 1)
\end{aligned}$$

1.d

Puisque $u_n > 1$ et $\sqrt{2} < 2$, on a $u_{n+1} - u_n < 0$ donc (u_n) est décroissante.

2.a

On pose $v_n = u_n - 1$. Alors :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(u_n - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $v_0 = 1$.

2.b

Donc $v_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ et $u_n = v_n + 1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + 1$.

Exercice 2

On a $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1

$$v_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

2

Puisque les racines carrées sont positives, $v_n > 0$, donc (v_n) est minorée par 0.

3

On veut $v_n < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ est strictement croissante. Vérifions pour $n = 1$:

$$\sqrt{2} + 1 > 2 \Rightarrow \text{vrai, donc la propriété est vraie pour tout } n \geq 1.$$

4

(v_n) est minorée par 0, majorée par $\frac{1}{2}$, donc bornée.

Exercice 3

On a $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{25}{10-u_n}$

1.a

$$\begin{aligned} 5 - u_{n+1} &= 5 - \frac{25}{10 - u_n} = \frac{5(10 - u_n) - 25}{10 - u_n} = \frac{25 - 5u_n}{10 - u_n} \\ &= \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)} \end{aligned}$$

1.b

Soit $P(n) : 5 - u_n > 0$.
Initialisation : $u_1 = 0 \Rightarrow 5 - u_1 = 5 > 0$
Hérédité : $5 - u_n > 0 \Rightarrow 5(5 - u_n) > 0$ et $5 + (5 - u_n) > 0$, donc $\frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)} > 0$, donc $5 - u_{n+1} > 0$
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $5 - u_n > 0$

2.a

On pose $v_n = \frac{5}{5-u_n}$

$$v_{n+1} = \frac{5}{5 - u_{n+1}} = \frac{5}{\frac{5(5-u_n)}{10-u_n}} = \frac{(10 - u_n)}{(5 - u_n)}$$

2.b

$$v_{n+1} - v_n = \frac{10 - u_n}{5 - u_n} - \frac{5}{5 - u_n} = \frac{5}{5 - u_n} = 1$$

Donc (v_n) est arithmétique de raison 1 et $v_1 = \frac{5}{5-0} = 1$ donc $v_n = n$.

2.c

$$v_n = \frac{5}{5 - u_n} \Rightarrow u_n = 5 - \frac{5}{v_n} = 5 - \frac{5}{n}$$

Exercice 4

Soit $f(x) = \exp(x/2)$ sur $[0; +\infty[$.

1

f est dérivable sur $[0; +\infty[$.
On pose $u(x) = x/2 \Rightarrow u'(x) = 1/2$
Donc $f'(x) = \frac{1}{2}\exp(x/2) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante.

2

On pose $u_0 = 2$, $u_{n+1} = f(u_n)$

$$u_1 = f(2) = e, \quad u_2 = f(e) = e^e$$

3

Récurrence sur $P(n) : u_n > e - 1$
Initialisation : $u_1 = e > e - 1$
Hérédité : $u_n > e - 1 \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) > f(e-1) = e^{e-1} > e - 1$
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > e - 1$

4

Récurrence sur $P(n) : u_{n+1} > u_n$
Initialisation : $u_1 = e > 2 = u_0$
Hérédité : $u_{n+1} > u_n \Rightarrow u_{n+2} = f(u_{n+1}) > f(u_n) = u_{n+1}$
Conclusion : (u_n) est strictement croissante

Alors, tu as eu combien ? Si tu es toujours aussi chaud, va voir les autres cours dans la rubrique *Mathématiques* pour cartonner le bac !