Description d'un mouvement

I- Les bases de la cinématique

A) Vecteur position $\overrightarrow{OM}$

On prend un point M qui correspond au centre d'inertie/centre de gravité de l'objet étudié.

On définit un système M qui prend au cours de son mouvement une suite de positions repérées par les coordonnées (x,y,z) dans un repère d'espace $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ appartenant à un référentiel.

Remarque : En règle générale, la dimension z est ignorée. On arrive alors à un repère de l'espace $(O,\vec{i},\vec{j})$ bidimensionnel.

On a alors le vecteur position de M à une date t, à partir de l'origine O du repère.

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

On dit que x(t), y(t) et z(t) sont les équations horaires des positions de M.

La norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2}$ exprimée en m ou (SI).

B) Vecteur vitesse $\vec{v}$ de M

Il existe deux vecteurs vitesses :

— Le vecteur vitesse moyenne à la date t_i noté $\vec{v}_{moy}$:

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{OM}(t_{i+1}) - \overrightarrow{OM}(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

— Le vecteur vitesse instantanée à une date t_i noté $\vec{v}$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$$

De cela on en déduit :

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \quad v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

Alors :

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} \\ v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} \end{cases}$$

D'où

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{(v_x(t))^2 + (v_y(t))^2 + (v_z(t))^2} \text{ exprimé en m.s}^{-1} \text{ dans S.I}$$

5) Vecteur accélération $\vec{a}$ de M.

Définition : L'accélération correspond à la variation de vitesse de l'objet à l'étude lors de son mouvement.

Il existe deux vecteurs accélérations :

— Le vecteur accélération moyenne noté $\vec{a}_{moy}$:

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

— Le vecteur accélération instantanée noté $\vec{a}$:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

De cela on en déduit :

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}, \quad a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt}, \quad a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt}$$

Alors :

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} \\ a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt} \end{cases}$$

D'où

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{(a_x(t))^2 + (a_y(t))^2 + (a_z(t))^2} \text{ exprimé en m.s}^{-2} \text{ dans S.I}$$

Dans ce repère :
— La vitesse a pour relation : $\vec{v} = v\vec{T}$
— L'accélération a pour relation : $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}\vec{T} + \frac{v^2(t)}{R}\vec{N}$
où R est le rayon du cercle de centre O. En outre la distance OM.

Remarque : Dans un mouvement rectiligne uniforme :

$v =$ constante mais $\vec{v} \neq$ constante car l'orientation de $\vec{v}$ change à chaque instant.

Comme $v =$ constante, alors $\frac{dv(t)}{dt} = 0$
Donc dans ce type de mouvement, $\vec{a}$ a pour relation :

$$\vec{a}(t) = \frac{v^2(t)}{R}\vec{N} \Rightarrow \vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{N}$$

II - Étude de mouvements

Un mouvement se caractérise par la trajectoire et la variation de la vitesse de l'objet d'étude.

A) Mouvement rectiligne

Définition : Un mouvement est dit rectiligne lorsqu'il est tel que le mouvement du point M dans un référentiel donné à chaque instant, sa trajectoire est droite et que son vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ garde la même direction.

Mouvement uniforme	Mouvement uniformément accéléré	Mouvement uniformément ralenti
$v =$ constante	Vitesse augmente	Vitesse diminue
$a = 0 \quad (\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0})$	$\overrightarrow{a}$ $\overrightarrow{v}$ même direction même sens	$\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{v}$ même direction sens opposé

B) Mouvement circulaire

Définition : Un mouvement est dit circulaire quand la trajectoire de l'objet d'étude est un cercle de rayon O.

Pour exprimer les vecteurs vitesse et le vecteur accélération du système, on se place dans un repère de Frenet centré sur l'objet d'étude. Ce repère est dit mobile, car à pour origine M. Il est constitué de deux vecteurs orthonormés $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{T}$. $\overrightarrow{T}$ est le vecteur unitaire tangentiel à la trajectoire orienté dans le sens du mouvement. $\overrightarrow{N}$ est le vecteur unitaire normal à la trajectoire orienté vers le centre du cercle.

De cela on en déduit:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

Alors:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

D'où $v = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{(v_x(t))^2 + (v_y(t))^2 + (v_z(t))^2}$ exprimé en m.s^{-1} dans S.I.

C) Vecteur accélération $\vec{a}$ de M

Définition : L'accélération correspond à la variation de vitesse de l'objet d'étude lors de son mouvement.

Il existe deux vecteurs accélérations:

- Le vecteur accélération moyenne noté $\vec{a}_{\text{moy}}$:

$$\vec{a}_{\text{moy}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

- Le vecteur accélération instantanée noté $\vec{a}(t)$:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

De cela on en déduit:

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} \quad a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} \quad a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt}$$

Alors:

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \\ \frac{dv_z(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

D'où $a = \|\vec{a}(t)\| = \sqrt{(a_x(t))^2 + (a_y(t))^2 + (a_z(t))^2}$ exprimé en m.s^{-2} dans S.I.