Dynamique d'un système électrique

I - Grandeur en électricité En électricité, les grandeurs *qui ne dépendent pas du temps* sont notées en majuscule (la tension U_{AB} ou l'intensité I).

Lorsque *ces mêmes grandeurs dépendent du temps*, on dit que le régime est variable, c'est-à-dire que les tensions et l'intensité du courant varient au cours du temps. On les note alors en minuscule tel que l'on a la tension $u(t)$, l'intensité $i(t)$.

Dans ce cas-là, on a :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

où q est la charge électrique.

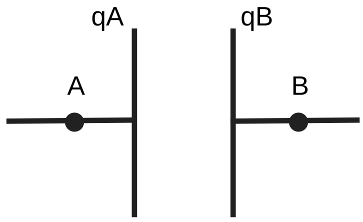
II - Le condensateur

A - Définition Un condensateur est un système constitué de deux surfaces conductrices en regard l'une de l'autre appelées *armatures*, séparées par un matériau isolant.

S'il existe une tension électrique entre ses armatures, alors des charges électriques s'accumulent. On dit que ceci possède *un comportement capacitif.*

Définition Un comportement capacitif se manifeste dans une branche d'un circuit où l'intensité du courant électrique varie sur une durée caractéristique pendant le régime transitoire avant d'atteindre une valeur nulle lors du régime stationnaire. Ce type de comportement correspond à l'accumulation de charge électrique de signe opposé sur des surfaces en regard l'une de l'autre.

Le symbole du condensateur est:



B) Relation entre la charge et la tension électrique
On a la relation de proportionnalité suivante:

$$q = C \times u_{AB} \quad \Rightarrow \quad q = C \times u_c$$

avec C la capacité du condensateur en Farad (F).
C dépend de la surface S des armatures et de la distance e qui les sépare.

$$C = \varepsilon_0 \times \varepsilon_r \times \frac{S}{e}$$

avec ε_0 la permittivité diélectrique du vide,

ε_r la permittivité diélectrique relative.

or

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

Alors,

$$C = \varepsilon_0 \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \times \frac{S}{e}$$

$$C = \varepsilon \times \frac{S}{e}$$

avec ε la permittivité diélectrique absolue.

III - Charge et décharge d'un condensateur

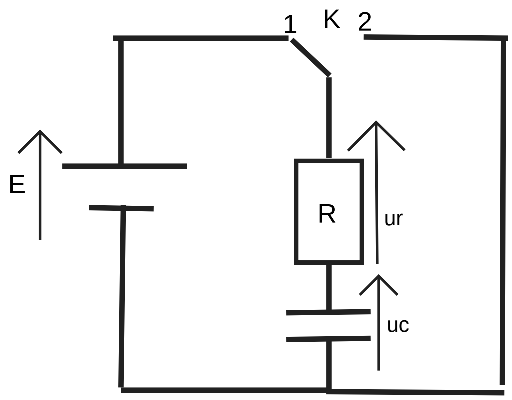
A) La charge

La charge d'un condensateur C par une source de tension continue se fait à travers une résistance R qui va limiter l'intensité maximale du courant dans le circuit. On parle de dipôle RC.

Nous pouvons modéliser l'évolution de la charge au cours du temps grâce à une équation différentielle.

Voici comment l'établir :

Tout d'abord nous avons le circuit suivant :



Pour que la charge se passe, l'interrupteur doit être en 1. Nous utiliserons :

- La loi des mailles à la maille 1:

$$E - u_R - u_C = 0 \quad (1) \quad \text{(sens horaire)}$$

- La loi d'Ohm au borne de R:

$$u_R = R \cdot i(t) \quad (2)$$

- La relation entre charge et u_C:

$$q = C \cdot u_C \quad (3)$$

Relation entre q et i

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (4)$$

Méthode pour établir l'équation différentiellle
Étape 1 : Examinons u_R et u_C
On utilise (2) : $\quad u_R = R \times i(t)$
On remplace $i(t)$ avec (4) : $\quad u_R = R \times \frac{dq(t)}{dt}$
On remplace $q(t)$ avec (3) : $\quad u_R = R \times \frac{d(C \times u_C(t))}{dt}$

$$u_R = R \times C \times \frac{du_C(t)}{dt} \quad \text{car } C \text{ est une constante}$$

Étape 2 : Remplaçons u_R dans l'équation (1)
(1) $\Rightarrow E = RC \times \frac{du_C(t)}{dt} - u_C(t) = 0$

$$E = RC \times \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$$

Étape 3 : Posons $\tau = RC$

$$E = \tau \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$$

$$\frac{E}{\tau} = \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C(t)$$

Ainsi on obtient une équation différentielle d'ordre 1 à coefficient constant avec un second membre constant.

L'ensemble des solutions est de la forme :

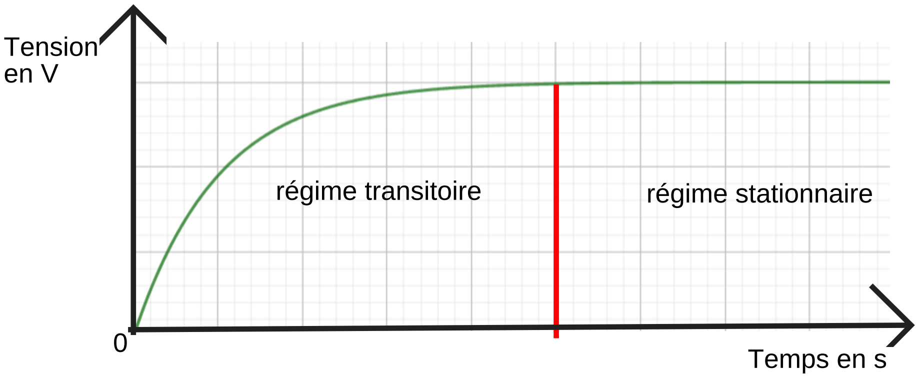
$$u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{\tau}$$

où A se détermine par les conditions initiales.
Ainsi à $t = 0$, $u_C(0) = 0$ car le condensateur n'est pas chargé.
Alors $Ae^0 + \frac{E}{\tau} = 0 \Rightarrow A = -\frac{E}{\tau}$

D'où

$$u_c(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$
$$= E\left(1 - \frac{\tau}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

- Cette équation peut être représentée graphiquement.



On admet qu'à $t = 5\tau$, le condensateur est chargé.

Pour déterminer τ, deux méthodes :

1. Soit on se place à $0{,}63E$ sur la courbe, et l'abscisse de ce point est τ.
2. Soit on trace l'asymptote horizontale de la courbe, puis la tangente en $t = 0$.

L'abscisse du point qui est à la sectante de ces deux droites est τ.

B) La décharge

Pour que la décharge se passe, il faut que l'interrupteur soit en position 2, cela implique que le circuit RC est en court-circuit, le condensateur se décharge ainsi dans la résistance R.

Pour écrire l'équation différentielle on procède aux mêmes étapes que pour la charge.

Seule différence : loi des mailles à la maille 2.

$$u_c + u_R = 0$$

On a alors l'équation différentielle :

$$\frac{d(u_c)}{dt} + \frac{1}{\tau} u_c(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

L'ensemble des solutions sont de la forme :

$$u_c(t) = A\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Les conditions initiales permettent de déterminer A :

À $t = 0$, le condensateur est totalement chargé :

$$u_c(0) = A\, e^{0} = E \quad \Rightarrow \quad A = E$$

On a :

$$u_c(t) = E\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Les règles avec τ sont les mêmes sauf qu'au lieu d'être à 0.63E, on se place à 0.37E.